Feuille d'exercices n°7 : Suites numériques

PTSI B Lycée Eiffel

28 novembre 2017

Vrai-Faux

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.
4. Si (v_n) est croissante, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$, alors (u_n) est croissante.
5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) aussi.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) aussi.

Exercice 1 (**)

Démontrer en revenant aux définitions les limites suivantes :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 2n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+3} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$

Exercice 2 (* à **)

Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

- $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{4^n}$
- $u_n = (-n+2)e^{-n}$
- $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$
- $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
- $u_n = \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$
- $u_n = e^{-\frac{1}{2n}} + \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$
- $u_n = \dfrac{n + \sin(n)}{n - \cos(n)}$
- $u_n = \mathrm{sh}(2n) - 2\,\mathrm{sh}(n)$
- $u_n = \tan\left(\dfrac{n\sqrt{\ln(1 + \frac{\pi^2}{n^2})}}{4}\right)$

Exercice 3 (**)

Trois réels a, b et c (avec $a \neq 0$) vérifient les drôles de conditions suivantes :

- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.
- a, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q (la même que ci-dessus, donc).

Déterminer les valeurs possibles de a, b, c et q.

Exercice 4 (*)

Déterminer pour chacune des suites suivantes la valeur de u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 6$.
2. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
3. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
4. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + u_n}{2}$ (méthode alternative à celle que vous avez naturellement utilisée : étudier la suite $(u_{n+1} - u_n)$)
5. $u_0 = 2$; $u_1 = \dfrac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$
6. $u_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots11}_{n}$
7. $z_0 = 2i$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2z_n - \overline{z_n})$ (oui, c'est une suite de nombres complexes)

Exercice 5 (**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$. Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 6 (**)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$, où a est un réel fixé strictement positif.

1. Étudier la nature de la suite (u_n).
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de n et de v_0.
3. En déduire une majoration de l'écart entre u_n et la limite de la suite en fonction de u_0 et de v_0. Pour $a = 2$, quelle valeur de n suffit-il de choisir pour que u_n soit une valeur approchée de la limite à 10^{-100} près (calculatrice autorisée pour l'application numérique !).

Exercice 7 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$, avec $a \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite est croissante (pour cette question, on étudiera les variations de la fonction $f : x \mapsto x \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$ en la dérivant deux fois).
2. Montrer que, $\forall x \geqslant 0$, $\dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.
3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{na}{n+a} \leqslant \ln u_n \leqslant a$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Quel résultat obtient-on en prenant $a = 1$?

Exercice 8 (**)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 3u_n + v_n + 1 \\ v_{n+1} & = & 2 - 2u_n \end{array} \right.$

1. Montrer que $a_n = u_n + v_n$ définit une suite arithmétique.
2. Montrer que $b_n = 2u_n + v_n$ définit une suite arithmético-géométrique.
3. En déduire les expressions de u_n et de v_n.
4. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et déterminer la limite de cette suite.

Exercice 9 (*)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où on a posé $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+5}$.

1. Déterminer les réels x vérifiant $f(x) = x$. On note a le plus petit d'entre eux, et b le plus grand.
2. Expliquer soigneusement pourquoi la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - b}{u_n - a}$ est effectivement bien définie.
3. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
4. En déduire une expression explicite de u_n.

Exercice 10 (*)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante : $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{k!}$, et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut e). Question subsidiaire (nettement plus difficile) : montrer que la limite commune des ces deux suites est un nombre irrationnel (qu'on ne peut pas écrire sous la forme d'un quotient d'entiers) en faisant un raisonnement par l'absurde.

Exercice 11 (**)

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On définit deux suites de la façon suivante : $u_0 = a$; $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ (pour une fois, pas besoin de récurrence).
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 12 (***)

Démontrer le théorème de Cesaro : si une suite (u_n) converge vers une limite finie l, alors la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ a la même limite l (on pourra commencer par traiter le cas particulier où $l = 0$, et revenir à la définition de la limite).

Pour une suite (u_n) convergeant vers l, on pose désormais $v_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{k=n} k u_k$. Déterminer la limite de (v_n) en utilisant une technique proche de celle de la première question.

Exercice 13 (***)

On considère une suite complexe définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

1. Étudier la suite dans le cas particulier où $z_0 \in \mathbb{R}$.
2. On suppose désormais que z_0 n'est pas réel et on pose $z_0 = re^{i\theta}$, avec $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. De même, on notera r_n et θ_n le module et l'argument de z_n. Exprimer r_{n+1} et θ_{n+1} en fonction de r_n et θ_n.
3. En déduire une expression explicite de r_n et de θ_n.
4. Montrer que la suite (z_n) converge vers une valeur à préciser.

Exercice 14 (***)

Cet exercice a pour but de démontrer certaines propriétés de la suite de Fibonacci. Rappelons que cette suite (F_n) est définie de la façon suivante : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On note dans cet exercice $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est le fameux nombre d'or), on pourra noter $\psi = -\dfrac{1}{\varphi}$ l'opposé de son inverse si on le souhaite.

1. Vérifier que $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
2. En remarquant que (F_n) est une suite d'un type bien connu, déterminer explicitement F_n en fonction de n (on ne sera pas surpris d'avoir des coefficients un peu laids, et on se posera par contre des questions philosophiques si φ n'intervient pas dans la formule).
3. On note, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$. Donner la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).
4. Étudier la monotonie de la suite (u_n) (ne vous étonnez pas s'il n'y a pas de conclusion simple).
5. En utilisant le résultat de la question 2, prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \varphi$.
6. Déterminer une fonction simple f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier la fonction f, puis tracer dans un même repère une allure de sa courbe représentative et la droite d'équation $y = x$. Faire un schéma permettant de comprendre la monotonie et la limite de la suite (u_n) dans ce même repère.
7. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $|\varphi - u_n| = \dfrac{1}{\varphi^n F_n}$.
8. En déduire que $|\varphi - u_n| \leqslant \dfrac{1}{F_n^2}$.
9. Donner un nombre rationnel approchant φ à 10^{-4} près (on utilisera évidemment la question précédente). Est-ce une approximation par défaut ou par excès ? Donner les valeurs décimales approchées à 10^{-4} près par défaut et par excès de φ.
10. Montrer que, pour tous les entiers pour lesquels ça a un sens, $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$. En déduire que tous les termes impairs de la suite de Fibonacci sont des nombres entiers pouvant s'écrire comme somme de deux carrés de nombre entiers.
11. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.
12. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ est une suite géométrique, et déterminer sa valeur.
13. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\arctan\left(\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right) - \arctan\left(\dfrac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Problème 1 (***)

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u \star v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie A : Exemples

1. **Premiers exemples**

   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

   (a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.

   (b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

2. **Un résultat de convergence**

   Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

   (a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité :

   $$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$$

   (b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

   $$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$

   (c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (d) Soit u' la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \star v$ est convergente et de limite nulle.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

   (a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   (b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

   (a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

   (b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

   Que peut-on en déduire pour les suites $b \star c$ et a ?

   (c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b \star \varepsilon$.

   En utilisant le résultat de la question **3**. de la Partie **1**, montrer que la suite d converge vers 0.

   (d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $d_n = a_n - \dfrac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

   En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Problème 2 (***)

On s'intéresse dans ce problème à l'ensemble $\mathcal{S}$ constitué de toutes les suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = \dfrac{1}{2}(u_n^2 + u_{n+1}^2)$, avec $u_0 \geqslant 0$ et $u_1 \geqslant 0$. Si (x, y) est un couple de réels positifs, on notera $(u_n(x, y))$ la suite appartenant à $\mathcal{S}$ et vérifiant $u_0(x, y) = x$ et $u_1(x, y) = y$. Pour tout réel λ, on notera $E_\lambda = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid (u_n(x, y))$ converge vers $\lambda\}$. On notera également $E_\infty = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid (u_n(x, y))$ diverge vers $+\infty\}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n(1, 0))$.
2. (a) Déterminer toutes les suites constantes appartenant à $\mathcal{S}$.
   (b) Montrer que, si une suite dans $\mathcal{S}$ a deux termes consécutifs égaux à 1, alors elle est constante.
   (c) Que peut-on dire d'une suite de $\mathcal{S}$ ayant un terme nul autre que les deux premiers ?
3. On suppose qu'une suite de $\mathcal{S}$ admet une limite finie l. En passant à la limite dans la relation de récurrence, déterminer les valeurs possibles de l.
4. Soient (a, b) deux réels quelconques.
   (a) Montrer que, si $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}$, alors $b \geqslant 1$ ou $a = b = 0$.
   (b) Montrer que, si $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \leqslant a \leqslant b$, alors $b \leqslant 1$.
5. Comparer le signe de $u_{n+3} - u_{n+2}$ et de $u_{n+2} - u_n$ pour une suite (u_n) appartenant à $\mathcal{S}$.
6. On suppose dans cette question que la suite (u_n) (appartenant à $\mathcal{S}$) vérifie la condition suivante : pour un certain entier n, on a $u_n \leqslant u_{n+2}$ et $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+3}$.
   (b) Montrer que la suite est croissante, puis qu'elle est strictement croissante.
   (c) Montrer que $u_{n+2} \geqslant 1$.
   (d) En déduire que la suite diverge vers $+\infty$.
7. On suppose cette fois-ci que $u_{n+2} \leqslant u_n$ et $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. Montrer en procédent comme dans la question précédente que la suite (u_n) converge vers 0.
8. Quelles sont les limites des suites $(u_n(\sqrt{2}, 0))$ et $(u_n(2, 0))$?
9. On suppose qu'une suite (u_n) appartenant à $\mathcal{S}$ n'a pas pour limite 0, ni $+\infty$, et et qu'elle n'est pas constante.
   (a) Montrer que $u_1 \neq u_0$.
   (b) Montrer que u_{n+2} est toujours strictement compris entre u_n et u_{n+1}.
   (c) On suppose $u_0 < u_1$, montrer que la sous-suite (u_{2n}) est strictement croissante, et la sous-suite (u_{2n+1}) strictement décroissante. Prouver ensuite que (u_n) converge vers 1.
   (d) On prouve de même que la suite (u_n) converge vers 1 si $u_1 < u_0$. Déduire des questions précédentes que tout couple de réels positifs (x, y) appartient à l'un des trois ensembles E_0, E_1 et E_∞.
10. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble $C_2 = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid u_2(x, y) = 1\}$.
11. Déterminer une fonction h telle que $u_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = h(y)$. Étudier rapidement la fonction h et représenter graphiquement l'ensemble $C_3 = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid u_3(x, y) = 1\}$.
12. Étudier la position relative des ensembles C_2 et C_3.
13. On admet les résultats suivants concernant les suites de $\mathcal{S}$:
    - (u_n) diverge vers $+\infty$ si et seulement s'il existe un entier n pour lequel $u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 1$.
    - (u_n) converge vers 0 si et seulement s'il existe un entier n pour lequel $u_n \leqslant 1$ et $u_{n+1} \leqslant 1$.

    Déterminer deux sous-ensembles de $(\mathbb{R}^+)^2$ les plus grands possibles inclus respectivement dans E_0 et dans E_∞.