

Feuilles d'exercices n°4 : Ensembles

PTSI B Lycée Eiffel

5 octobre 2017

Exercice 1 (***)

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$
2. $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.
3. $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$
4. Le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés est $\frac{n(n-3)}{2}$.
5. La dérivée n -ème de la fonction $f : x \mapsto (x-1)e^{-x}$ est donnée par $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$.

Exercice 2 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{R}, u_{n+1} = 3u_n + 2$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n , puis la prouver par récurrence.

Exercice 3 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Exercice 4 (***)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 0, u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n , puis la prouver par récurrence.

Exercice 5 (*)

Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{12}$
2. $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1024}$
3. $S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots + \frac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50$

Exercice 6 (** à ***)

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1)$
2. $\sum_{k=945}^{k=2015} 3$
3. $\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k$
4. $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2 - 1)$
5. $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k}$
6. $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2$

$$3. \sum_{k=1}^{k=n} (6k^2 + 4k + 1)$$

$$6. \sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k}$$

$$9. \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$$

Exercice 7 (**)

Déterminer trois réels a , b et c tels que $\forall k \geq 2$, $\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 8 (**)

Il s'agit d'une méthode alternative à celle du cours pour calculer la somme des carrés d'entiers.

$$1. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ Calculer } \sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3.$$

$$2. \text{ En développant } (k+1)^3, \text{ exprimer } \sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 \text{ à l'aide de sommes classiques.}$$

$$3. \text{ En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de } \sum_{k=1}^{k=n} k^2.$$

Exercice 9 (***)

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij; \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij; \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}; \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| \text{ et } \sum_{1 \leq i, j \leq n} i2^j$$

Exercice 10 (**)

Calculer les produits suivants :

$$1. \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad 2. \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad 3. \prod_{k=1}^{k=n} (6k-3)$$

Exercice 11 (***)

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3$ de trois façons différentes.

- Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
- Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.
- On pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
- Calculer T_n et U_n .
- Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
- Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

Exercice 12 (***)

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$, et $T_n = \sum_{k=1}^n k^4$. On note également $u_n = \frac{T_n}{S_n}$, et $v_n = 5(u_{n+1} - u_n)$.

1. Rappeler la formule vue en cours pour S_n , et donner les valeurs de S_n pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à 5.
2. Donner la valeur de T_n pour ces mêmes entiers (évitiez de vous planter en calculant 5^4), et en déduire les valeurs correspondantes de u_n (on simplifiera les fractions obtenues si possible) et v_n .
3. Deviner la valeur de v_n en fonction de n (on ne cherche pas à démontrer cette formule pour l'instant), et en déduire celle de u_n , puis celle de T_n (en utilisant bien sûr à nouveau la formule du cours pour S_n).
4. Démontrer par récurrence que $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ (question indépendante des précédentes, je donne la formule pour que ceux qui ont bloqué avant puissent tenter de faire la récurrence).

Exercice 13 (**)

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout!) de \mathbb{N} dans \mathbb{N} :

- $f_1(n) = n + 5$
- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n + 1$ si n est pair, et $f_3(n) = n - 1$ si n est impair
- $f_4(n) = \text{Ent}\left(\frac{n}{3}\right)$
- $f_5(n) = |n - 10|$

Exercice 14 (*)

Pour chacune des applications suivantes, données avec leur ensemble de départ E et leur ensemble d'arrivée F , déterminer si elles sont injectives, surjectives, bijectives (tous les moyens sont bons, dérivation comprise) :

1. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $E = F = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x^3 + x - 2$, $E = F = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$, $E =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$, $F = \mathbb{R}_+$.
4. $i(x) = \frac{3x+2}{x-1}$, $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $F = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Exercice 15 (***)

Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective (démontrer chaque implication séparément). Quelle est alors sa réciproque ?

Exercice 16 (**)

Dans cet exercice, on note, pour un sous-ensemble A de \mathbb{N} , f_A la fonction indicatrice de l'ensemble A .

1. En prenant pour cette question l'ensemble A de tous les entiers naturels pairs, la fonction f_A est-elle injective ? Surjective ?
2. Quels sont les sous-ensembles A pour lesquels f_A n'est pas surjective ?
3. Démontrer que, quels que soient les ensembles A et B , $f_{A \cap B} = f_A \times f_B$ et $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_{A \cap B}$.
4. Exprimer $f_{\bar{A}}$ en fonction de f_A (et démontrer la formule, bien entendu).
5. Déduire des deux questions précédentes une expression de $f_{A \setminus B}$, puis de $f_{A \Delta B}$ (on rappelle que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, ou encore $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$).
6. Redémontrer beaucoup plus facilement que dans un exercice précédent que la différence symétrique est associative, c'est-à-dire que $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

Exercice 17 (*)

On considère sur \mathbb{Z} la relation définie de la façon suivante : xRy si et seulement si $x + y$ est pair. Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et déterminer les classes d'équivalence de cette relation.

Exercice 18 (*)

On définit sur \mathbb{R} une relation R par $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$. Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et déterminer la classe d'équivalence d'un réel x . Combien comporte-t-elle d'éléments ?

Exercice 19 (*)

Déterminer le nombre de diviseurs de $10!$ (sans les écrire tous).

Exercice 20 (**)

Résoudre dans \mathbb{Z} les équations suivantes :

1. $xy = 2x + 3y$.
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$.
3. $x^2 = 9y^2 - 39y + 40$.
4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Exercice 21 (***)

On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
2. Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p$. En déduire que le pgcd de F_n et de F_p est le même que celui de F_n et F_{n+p} .
4. Montrer que, $\forall (n, m) \geq 2$, $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.
5. Montrer que, si $n \geq 5$ et n est premier, alors F_n est premier. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 22 (** à *****)

Un ensemble est E est dit **dénombrable** s'il existe une application $f : E \rightarrow \mathbb{N}$ bijective. Comme trouver une application bijective est parfois délicat, on pourra admettre le théorème suivant : tout ensemble infini E pour lequel il existe une application injective de E dans \mathbb{N} est dénombrable.

1. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
2. Montrer que \mathbb{Z} est dénombrable.
3. Montrer que \mathbb{N}^2 est dénombrable.
4. Montrer que \mathbb{Q} est dénombrable.
5. Montrer que \mathbb{R} n'est pas dénombrable (c'est ça qui vaut une difficulté de *****)
6. Montrer qu'il existe une bijection de $]0; 1[$ dans \mathbb{R} .
7. Montrer qu'il y a « autant de points » dans une droite que dans un demi-cercle (autrement dit qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre).

Exercice 23 : théorème de Cantor-Bernstein (****)

Soient X et Y deux ensembles tels qu'il existe deux applications $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ toutes les deux injectives. On veut prouver qu'il existe une bijection de X sur Y . Pour cela, on note $\varphi = f \circ g$. On définit les sous-ensembles A_i de Y par récurrence de la façon suivante : $A_0 = Y \setminus f(X)$, $A_1 = \varphi(A_0)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_{i+1} = \varphi(A_i)$. On pose enfin $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

1. Montrer que les ensembles A_i sont disjoints.
2. Montrer que l'ensemble A est stable par φ (c'est-à-dire que $\varphi(A) \subset A$).
3. On pose $B = g(A)$, et $C = X \setminus B$. Montrer que $f(B) = A \setminus A_0$, et que tout élément de B possède un unique antécédent par g dans Y . On notera cet antécédent $g^{-1}(x)$. Montrer que $g^{-1}(x) \in A$.
4. On définit l'application $h : X \rightarrow Y$ en posant $h(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in B$, et $h(x) = f(x)$ si $x \in C$. Montrer que h est une bijection de X sur Y .