Feuille d'exercices n°12 : Polynômes

PTSI B Lycée Eiffel

1er février 2018

Exercice 1 (*)

Soient P et Q les deux polynômes définis par $P(X) = 2X^3 + 5X - 1$ et $Q(X) = -X^2 + 3X$. Déterminer chacun des polynômes suivants : $P+Q$; PQ ; $P^2(X)$; $P(X^2)$; $P \circ Q$; $Q \circ P$; $3P^3Q - Q \circ P^2$.

Exercice 2 (*)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P.
2. Factoriser P sous la forme $(X+2)Q(X)$, où Q est un polynôme de degré 2.
3. En déduire le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre les inéquations $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 > 0$ et $e^{2x} - 2e^x \leqslant 5 - 6e^{-x}$

Exercice 3 (* à ***)

Factoriser chacun des polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$:

1. $P(X) = X^4 - 1$
2. $P(X) = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$ (on trouvera un entier $n \leqslant 5$ racine double de P).
3. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$
4. $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
5. $P(X) = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$

Exercice 4 (**)

1. Déterminer la forme algébrique des racines carrées des nombres complexes $\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{i-\sqrt{3}}{2}$.
2. Effectuer la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$. En déduire, à l'aide de la question précédente, la factorisation de $X^6 - i$.
3. Résoudre l'équation $z^6 = i$ en passant par la forme exponentielle. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5 (**)

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer tous les polynômes la vérifiant :

- P est de degré 3, $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$ et $P'(0) = 2$.
- $(X+3)P(X) = XP(X+1)$
- P est de degré 3 ; $(X+1)^2$ divise $P+1$ et $(X-1)^2$ divise $P-1$.
- $(X^2+4)P'' = 6P$
- $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$

Exercice 6 (**)

Effectuer la division euclidienne de P par Q dans chacun des cas suivants :

1. $P(X) = X^3 + X^2 - 2X + 3$ et $Q(X) = X^2 + 2X - 1$
2. $P(X) = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$, et $Q(X) = X^2 - 3X + 1$
3. $P(X) = X^4 - 2X^2\cos(2\theta) + 1$ et $Q(X) = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$
4. $P(X) = X^3 - iX^2 - X$, et $Q(X) = X - 1 + i$
5. $P(X) = (X\sin(\theta) + \cos(\theta))^n$ et $Q(X) = X^2 + 1$ (on calculera seulement le reste)

Exercice 7 (***)

On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
4. En déduire une expression simple de $P_n(2\cos(\theta))$.
5. Déterminer les racines de P, et sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 8 (***)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 1 \\ x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & -5 \end{array}\right.$$

Pour cela, on cherchera un polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines x, y, et z, et on calculera chacun de ses coefficients en utilisant les conditions données.

Exercice 9 (***)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $n+1$ polynômes de degré n en posant $\forall k \in \{0; \dots; n\}$, $B_{n,k} = \dbinom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$.

1. Que valent les polynômes $B_{3,k}$ pour les différentes valeurs de k pour lesquelles ils sont définis ?
2. Étudier rapidement les polynômes $B_{3,k}$ sur l'intervalle $[0, 1]$, et tracer une allure de leurs courbes représentatives sur ce même intervalle.
3. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=3} B_{3,k}$? Généraliser ce résultat, et en déduire que $\forall x \in [0, 1]$, $B_{n,k}(x) \in [0, 1]$ (quelles que soient les valeurs de n et de k).
4. Exprimer le polynôme dérivé $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1;k-1}$ et de $B_{n-1,k}$.
5. On pose $f(x) = x$, et on note f_n la fonction définie sur $[0; 1]$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$.

   Montrer que, $\forall x \in [0; 1]$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.
6. Effectuer la même démonstration qu'à la question précédente en prenant cette fois-ci $f(x) = x^2$.

Problème (***)

Ce problème présente une méthode pour calculer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, qui fait intervenir des polynômes (et un petit peu de trigonométrie). Si vous êtes sages, nous verrons d'autres méthodes pour calculer cette même « somme infinie » (on parlera de séries d'ici la fin de l'année) dans certains chapitres ultérieurs.

1. On définit la fonction cotangente (en abrégé cotan) par la formule $\text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Donner le domaine de définition, la périodicité, les variations sur une période, et une allure de courbe représentative pour cette fonction. On montrera en particulier que cotan est bijective de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$.
2. On définit pour tout entier $n \geqslant 1$ le polynôme $Q_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.
   (a) Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.
   (b) Prouver que les racines de Q_n sont les nombres $-i\,\text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, pour $n \in \{1, 2\dots, n-1\}$.
   (c) Montrer que ces racines sont simples, et donner la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.
3. On définit désormais un nouveau polynôme (toujours pour $n \geqslant 1$) par $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}X^k$.
   (a) Donner les expressions explicites des polynômes P_1, P_2 et P_3.
   (b) Montrer que $2P_n(X^2) = Q_{2n+1}(X)$.
   (c) En déduire les racines de P_n, et vérifier qu'elles sont simples.
   (d) Que vaut la somme des racines du polynôme P_n ? En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.
4. (a) Montrer que, $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.
   (b) En déduire que, sur le même intervalle, $\text{cotan}^2(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 + \text{cotan}^2(x)$.
   (c) Appliquer l'encadrement précédent à $x = \dfrac{k\pi}{2n+1}$, et en déduire un encadrement de $\dfrac{1}{k^2}$, puis la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.
5. En complément, on peut obtenir presque sans effort supplémentaire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}$:
   (a) Montrer par récurrence que, si $(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$, alors $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^2 + 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i z_j$.
   (b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^4$ (on pensera aux relations coefficients-racines dans le polynôme P_n).
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}$.