Feuille d'exercices n°13 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

5 mars 2018

Vrai-Faux

1. Faux, ça ne marche pas si $b < a$ (oui, je sais, c'est vraiment un piège minable).
2. Vrai, c'est la propriété permettant de construire l'intégrale des fonctions continues à partir de celle des fonctions en escalier.
3. Faux, si on ne précise pas que f est une fonction positive, ça n'a aucune raison de marcher.
4. Vrai, la méthodes est construire pour donner « naturellement » une valeur exacte pour un polynôme de degré 2, mais ça marche aussi pour le degré 3.
5. Faux, c'est $f^{(n+1)}(t)$ et pas $f^{(n)}(t)$ dans l'intégrale.

Exercice 1 (**)

1. On effectue une intégration par parties en posant $v'(x) = x^2$ et $u(x) = \ln x$, donc $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, pour obtenir $I_1 = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$.
2. Sur $[1; e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$. En découle $0 \leqslant x^2(\ln x)^{n+1} \leqslant x^2(\ln x)^n$, puis par intégration $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est décroissante.
3. La suite est décroissante minorée par 0, elle converge.
4. Le plus simple est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln x - \dfrac{x}{e}$. On a $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e}$, qui est positif sur l'intervalle $[1; e]$. La fonction f est donc croissante sur $[1; e]$, et $f(e) = 0$, donc f est négative sur $[1; e]$. On en déduit que $I_n \leqslant \displaystyle\int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2}\, dx = \frac{1}{e^n(n+3)}$. La majoration calculée tendant vers 0, le théorème des gendarmes s'applique, et (I_n) converge vers 0.
5. Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec $u'(x) = x^2$ et $v(x) = (\ln x)^{n+1}$: $I_{n+1} = \left[\dfrac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \frac{x^2}{3}(n+1)(\ln x)^n = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3} I_n = \frac{e^3}{3}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} e^3 - I_n = e^3$.

Exercice 2 (**)

1. Calculons donc : $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}\, dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ($\simeq 0.4$) ; $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t}\, dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$ ($\simeq 0.55$) ; enfin, $u_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\, dt =$

$\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2+1}\,dt = \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} (\simeq 0.6)$.

2. Pour tout t dans $[0;1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $1+t+t^{n+1} \leqslant 1+t+t^n$ puis (tout étant positif) $\frac{1}{1+t+t^{n+1}} \geqslant \frac{1}{1+t+t^n}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite (u_n) est donc croissante.
3. Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurence en constatant que $\forall t \in [0;1]$, $1+t+t^n \geqslant 1+t$, donc $\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}$. En intégrant l'inégalité, on obtient $u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$ (la majoration doit être guidée par le fait qu'on veut obtenir $\ln(2)$ à la fin).
4. La suite (u_n) est donc croissante et majorée, elle converge.
5. En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a $\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.
6. Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale : $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1+t+t^n-(1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)} = \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$. Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand $t \in [0;1]$, donc $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant t^n$, et en intégrant cette inégalité on a $\ln 2 - u_n \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
7. On a vu plus haut que $u_n \leqslant \ln 2$, donc $\ln 2 - u_n \geqslant 0$. Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donne $\lim_{n\to+\infty}(\ln 2 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 3 (*)

1. Allons-y : $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$, puis $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}\,dt = 1 - I_0 = 1-\ln(2)$, et enfin $I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^2+t}{1+t} - \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^1 t\,dt - I_2 = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - (1-\ln(2)) = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}$.
2. Même pas besoin de s'embêter à déterminer la monotonie de la suite (qui est en l'occurence décroissante) : comme $\frac{1}{1+t} \leqslant 1$ sur $[0,1]$, on peut encadrer I_n en écrivant $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
3. Pour une fois, inutile de faire une intégration par parties, il vaut mieux procéder astucieusement en généralisant les calculs de la première question : $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1}+t^n}{1+t}\,dt - I_n = \int_0^1 t^n\,dt - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n$.

4. Méthode « avec les mains » : $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \frac{1}{2} + I_2 = \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n I_n$. Autrement dit, $\ln(2) = S_n + (-1)^n I_n$, ou encore $S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$.
5. Il n'y a plus rien à faire d'autre que de constater : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln(2)$.

Exercice 4 (**)

1. On commence tranquillement : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dx = \frac{\pi}{4}$. À peine plus difficile, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = [\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$.
2. On veut donc calculer $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} \, dx$, en posant $t = \sin(x)$ (ce qu'on a le droit de faire puisque la fonction sin est bien une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration), ce qui donnera $dt = \cos(x) \, dx$. Les bornes vont devenir $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De plus, on peut écrire $\frac{1}{\cos(x)} \, dx = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} \, dx = \frac{1}{1 - \sin^2(x)} \times \cos(x) \, dx = \frac{1}{1 - t^2} \, dt$. On a donc $I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1 - t^2} \, dt$. Reste à décomposer en éléments simples, ce qu'on peut faire à coups d'astuces ignobles pour s'éviter un petit calcul : $\frac{1}{1 - t^2} = \frac{1 + t + 1 - t}{2(1 + t)(1 - t)} = \frac{1}{2(1 + t)} + \frac{1}{2(1 - t)}$. Donc $I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2(1 + t)} + \frac{1}{2(1 - t)} \, dt = \frac{1}{2}[\ln(1 + t) - \ln(1 - t)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(2 + \sqrt{2})^2}{4 - 2}\right) = \frac{\ln(3 + 2\sqrt{2})}{2}$.
Les plus malins remarqueront que $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, et donc que $I_1 = \ln(1 + \sqrt{2})$ (ce qui n'est pas vraiment beaucoup mieux si on cherche une valeur explicite).
3. On calcule bêtement $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{n+1}(x)} \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n(x)} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos(x)}{\cos^{n+1}(x)} \, dx$. La fonction à l'intérieur de l'intégrale étant positive (puisque $\cos(x) \leqslant 1$, et $\cos^{n+1}(x)$ est positif sur notre intervalle d'intégration), la positivité de l'intégrale permet d'affirmer que $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$, et donc que la suite (I_n) est croissante. Tout ce qu'on peut en déduire, c'est qu'elle admettra nécessairement une limite (finie ou infinie), mais comme on ne peut pas la majorer de façon évidente, on s'en tiendra là.
4. Écrivons donc $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} \, dx = I_{n+2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} \, dx$. Effectuons une IPP (intelligente !) sur ce dernier morceau en posant $u(x) = \sin(x)$, donc $u'(x) = \cos(x)$, et $v'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)}$, pour prendre $v(x) = \frac{1}{(n + 1)\cos^{n+1}(x)}$. On trouve alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} \, dx = \left[\frac{\sin(x)}{(n + 1)\cos^{n+1}(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(n + 1)\cos^n(x)} \, dx = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(n + 1) \times \frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}}} - \frac{I_n}{n + 1}$. Finalement, on a $I_n = I_{n+2} - \frac{\sqrt{2}^n}{n + 1} + \frac{I_n}{n + 1}$, ce qui donne bien $I_{n+2} = \frac{\sqrt{2}^n}{n + 1} + \frac{nI_n}{n + 1}$.
5. On sait que $I_n \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive), donc $I_{n+2} \geqslant \frac{\sqrt{2}^n}{n + 1}$, membre de droite qui a une limite infinie quand d tend vers $+\infty$. Celà suffit à affirmer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = +\infty$.

Exercice 5 (***)

Je vous sens tous venir avec votre récurrence, oubliez-là, ça ne sert à rien. Observer ce qui se passe pour les petites valeurs de n peut être utile. Ainsi, pour $n = 0$, le résultat est une conséquence du fait qu'une fonction (non nulle) de signe constant sur un intervalle ne peut pas avoir une intégrale nulle. Pour $n = 1$, raisonnons par l'absurde en supposant que f ne s'annule qu'une seule fois, disons en c. Alors la fonction est (par exemple) strictement positive sur $[0, c]$ et strictement négative sur $[c, 1]$ (si c'est le contraire, on prend $-f$ qui vérifie également les hypothèses de l'énoncé). L'astuce est alors de constater que la fonction $g : t \mapsto (c - t)f(t)$ est de signe constant sur $[0, 1]$, en l'occurence positive (puisque les deux facteurs sont positifs si $t \leqslant c$ et les deux sont positifs si $t \geqslant c$). Pourtant, $\displaystyle\int_0^1 (t-c)f(t)\,dt = \int_0^1 tf(t)\,dt - c\int_0^1 f(t)\,fdt = 0 - c \times 0 = 0$. La fonction n'étant pas tout le temps nulle sur $[0, 1]$, on tient une absurdité.

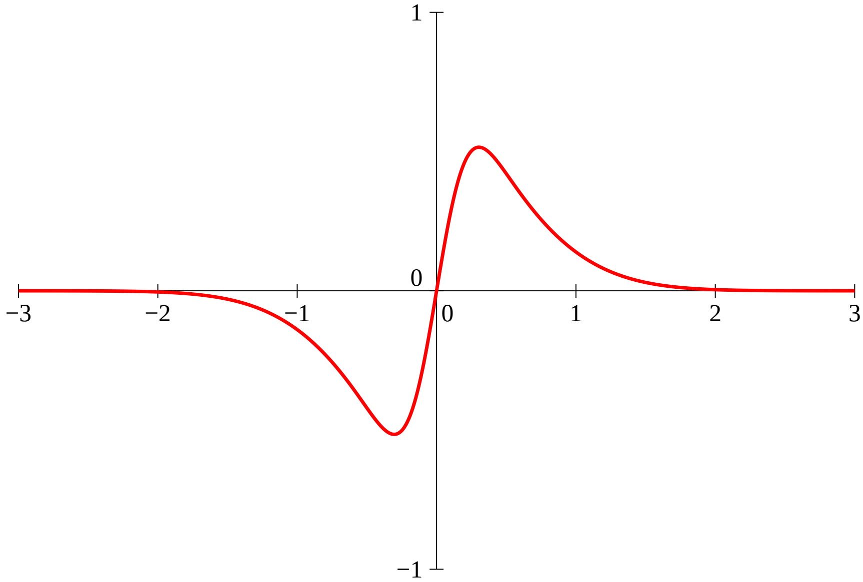
Généralisons ce résultat, en raisonnant par l'absurde dans le cas général. Supposons que f s'annule exactement n fois (si elle s'annule moins, c'est encore plus facile) en $c_1 < c_2 < \dots c_n$ en changeant de signe à chaque fois (si f ne change pas de signe, on enlève purement et simplement la valeur correspondante). Notons alors $P = (t - c_1)(t - c_2)\dots(t - c_n)$. Ce polynôme change lui aussi de signe en c_1, c_2, …, c_n, dont le produit $Pf(t)$ est de signe constant sur $[0, 1]$. Pourtant, son intégrale est nulle. En effet, quel que soit le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_i X^i$ de degré n (ou moins), par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 P(t)f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} a_i \int_0^1 t^i f(t)\,dt = 0$. Là encore, on a une contradiction, la fonction f ne peut donc pas s'annuler moins de $n + 1$ fois.

Exercice 6 (***)

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction qu'on intègre est définie partout. Par ailleurs, la fonction intégrée est paire, ce qui permet de prouver que f est impaire : en faisant le changement de variables $u = -t$, $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-4x} e^{-t^2}\,dt = \int_x^{4x} -e^{-u^2}\,du = -f(x)$. En notant $g(t) = e^{-t^2}$ et G une primitive de g, on peut écrire $f(x) = G(4x) - G(x)$, donc $f'(x) = 4g(4x) - g(x) = 4e^{-16x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(4e^{-15x^2} - 1)$. La dérivée s'annule lorsque $e^{-15x^2} = \dfrac{1}{4}$, soit $-15x^2 = -2\ln(2)$, donc $x = \pm\sqrt{\dfrac{2\ln(2)}{15}}$. La seule limite à calculer est en $+\infty$, si $x \geqslant 0$ on peut majorer e^{-t^2} par e^{-x^2} sur $[x, 4x]$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{4x} e^{-x^2}\,dt = 3xe^{-x^2}$, qui a une limite nulle en $+\infty$ par croissance comparée. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. On peut résumer ces informations dans le tableau de variations suivant (inutile d'essayer de calculer les valeurs des extrema, on note x_1 et $-x_1$ leurs abscisses pour simplifier) :

x	$-\infty$		$-x_1$		0		x_1		$+\infty$
f	0	↘	$-f(x_1)$	↗	0	↗	$f(x_1)$	↘	0

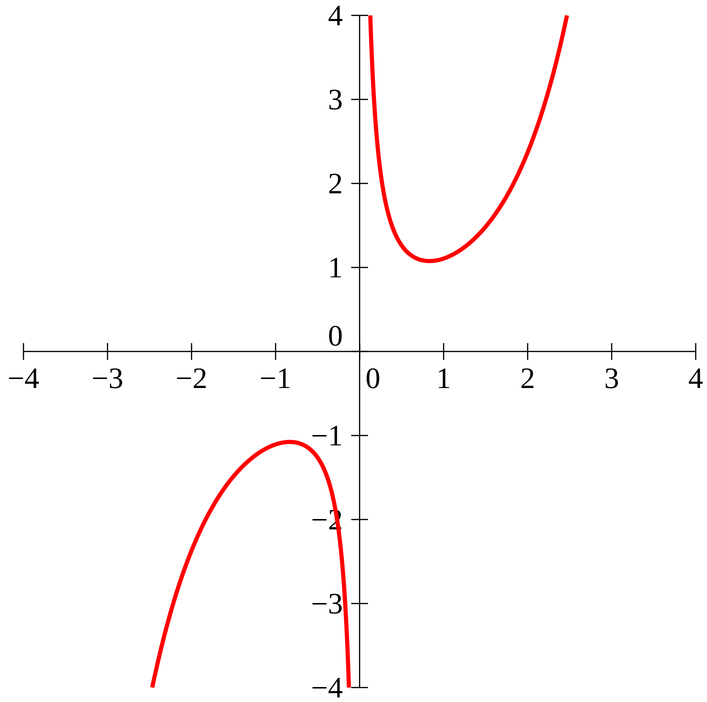
Et voici une allure de la courbe :



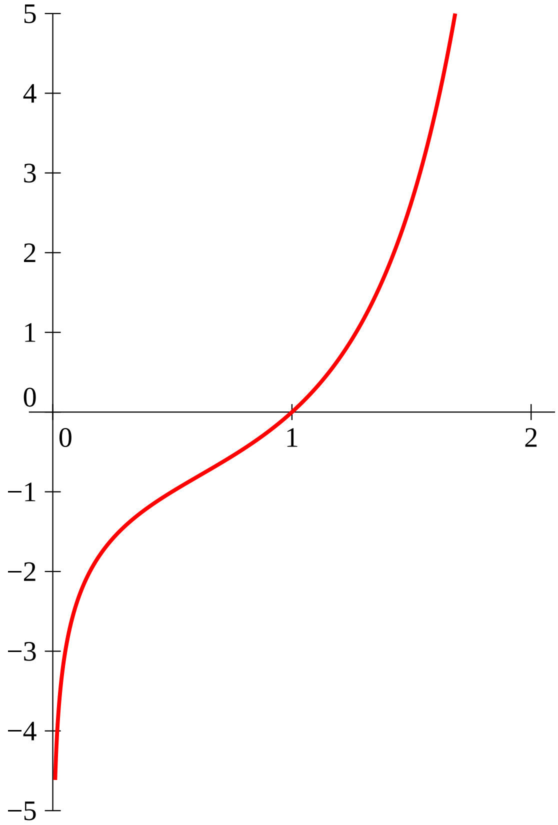
- Les techniques seront toujours les mêmes. Ici, la fonction à intégrer est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc g sera définie également sur $\mathbb{R}^*$ (si $x \neq 0$, $0 \notin [x, 2x]$). La fonction g est par ailleurs impaire comme intégrale d'une fonction paire, comme on vient de le prouver pour la fonction précédente. On se contentera donc d'étudier la fonction g sur $\mathbb{R}^{+*}$. On dérive comme d'habitude : en posant $f(t) = \dfrac{\mathrm{ch}(t)}{t^2}$ et F une primitive de f, alors $g(x) = F(2x) - F(x)$, donc $g'(x) = 2f(2x) - f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x) - 2\,\mathrm{ch}(x)}{2x^2}$. Or, $\mathrm{ch}(2x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - 2}{2} = 2\,\mathrm{ch}^2(x) - 1$, donc $g'(x)$ est du signe de $2\,\mathrm{ch}^2(x) - 2\,\mathrm{ch}(x) - 1$. En posant $X = \mathrm{ch}(x)$, on est ramenés à la résolution de l'équation $2X^2 - 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 12$, et admet pour racines $X_1 = \dfrac{2 + \sqrt{12}}{4} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$, et $X_2 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$. On ne garde que la première racine, la seconde étant plus petite que 1 et ne pouvant convenir comme valeur de $\mathrm{ch}(x)$. On est maintenant ramenés à résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$, soit $e^x + e^{-x} = 1 + \sqrt{3}$. En posant cette fois-ci $X = e^x$, on se retrouve à devoir résoudre $X^2 - (1 + \sqrt{3})X + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = (1 + \sqrt{3})^2 - 4 = 2\sqrt{3}$, et pour racines $X_3 = \dfrac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$, et $X_4 = \dfrac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$. La deuxième valeur est inférieure à 1 car $2\sqrt{3} > 3$, donc mènera à une valeur de x négative qui ne nous intéresse pas (qui est en fait l'opposé de celle qu'on va garder). On se contentera de garder comme valeur d'annulation de g' le nombre $x_0 = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$. Ouf ! Évidemment, voilà encore une valeur pour laquelle on sera incapable de déterminer ne serait-ce qu'une valeur approchée du maximum. On peut par contre déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$: $\forall t \in [x, 2x]$, $\mathrm{ch}(x) \leqslant \mathrm{ch}(t) \leqslant \mathrm{ch}(2x)$, et $\dfrac{1}{4x^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, donc $\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{4x^2} \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{\mathrm{ch}(2x)}{x^2}$, puis par intégration sur le segment $[x, 2x]$, $\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{4x} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{ch}(2x)}{x}$. Par croissance comparée, le membre de gauche tend vers $+\infty$ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (il y aura même une branche parabolique de direction (Oy). En 0, chacun des deux membres tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. On en déduit évidemment les limites en 0^- et en $-\infty$ par imparité de la fonction, et on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-x_0$	0	x_0	$+\infty$
g	$-\infty$ ↗	$-f(x_0)$	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ $f(x_0)$	↗ $+\infty$

Et une allure de la courbe :



- Et une dernière pour la route, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc $h(x)$ existe si $0 \notin [x, x^2]$, ce qui est le cas si $x > 0$. Autrement dit, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}^{+*}$. Comme d'habitude, $h(x) = F(x^2) - F(x)$, donc $h'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \dfrac{2xe^{x^2}}{x^2} - \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{2e^{x^2} - e^x}{x}$. Cette dérivée est du signe de $2e^{x^2} - e^x = e^x(2e^{x^2-x} - 1)$. Elle est positive lorsque $x^2 - x \geqslant -\ln(2)$, or $x^2 - x$ admet son minimum en $\dfrac{1}{2}$, de valeur $-\dfrac{1}{4} \geqslant -\ln(2)$. La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut ajouter facilement que $h(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$, mais $h(x) \leqslant 0$ sur $]0, 1]$ puisque les bornes de l'intégrale sont alors « dans le mauvais sens ». Les limites sont assez faciles à calculer : $\forall x \geqslant 1$, $h(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^x}{x^2}\, dt = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x$, ce qui suffit à prouver que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Par ailleurs, $\forall x \in]0, 1]$, $h(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t}\, dt$ (n'oubliez pas que les bornes sont dans le mauvais sens), donc $h(x) \leqslant \ln(x^2) - \ln(x) = \ln(x)$, donc $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$. Pas de tableau de variations cette fois-ci (il n'y aurait pas grand chose à mettre dedans), on se contentera d'une dernière allure de courbe :



Exercice 7 (***)

1. (a) Prenons deux réels x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. On a alors $e^{-tx} > e^{-ty}$ pour tout $t \in [0;1]$. De même $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$ et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement $f_k(x) > f_k(y)$, donc f_k est bien décroissante.

   (b) On a $f_k(0) = \displaystyle\int_0^1 t^k \, dt = \frac{1}{k+1}$. La suite $(f_k(0))$ est donc décroissante et tend vers 0. Or, f_k étant positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\forall x > 0$, $0 \leqslant f_k(x) \leqslant \dfrac{1}{k+1}$, ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2. (a) Il s'agit de faire une IPP en posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-tx}$, donc $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-tx}}{x}$ (faites bien gaffe que la variable ici est t et x est donc une constante). On obtient $f_{k+1}(x) = \left[-t^{k+1}\dfrac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 + (k+1)\displaystyle\int_0^1 t^k \frac{e^{-tx}}{x} \, dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x} f_k(x)$.

   (b) On a $f_0(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-tx} \, dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1-e^{-x}}{x}$. On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes : $f_1(x) = \dfrac{1}{x} f_0(x) - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x^2}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$, puis $f_2(x) = \dfrac{2}{x} f_1(x) - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x^3}(2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - x^2 e^{-x})$.

   (c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x f_0(x) = 1$.

3. (a) Le changement de variable est $u = tx$, qui donne $du = x \, dt$, et change les bornes de l'intégrale en 0 et x, ce qui donne donc $f_k(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx} \, dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u} \, \frac{du}{x} =$

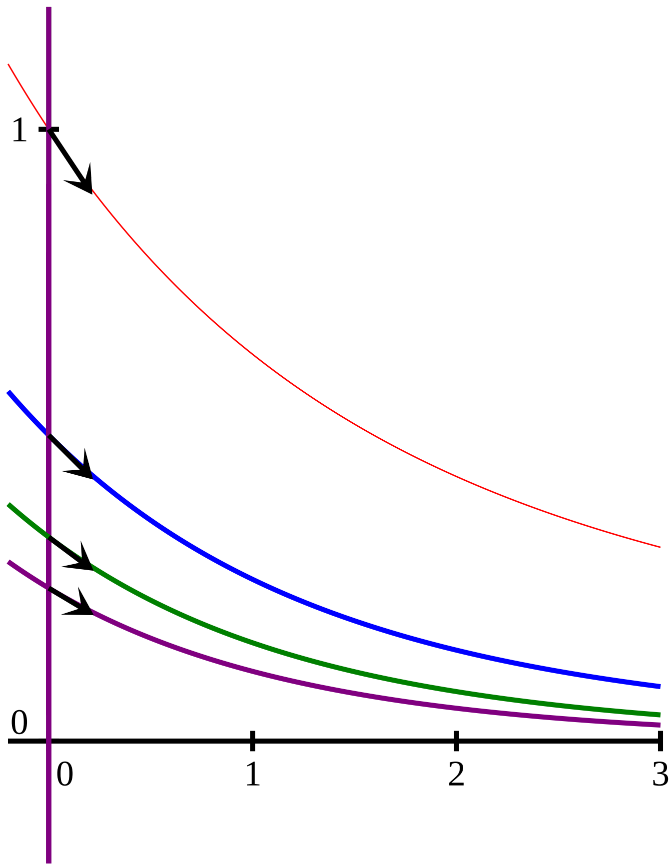
$\dfrac{1}{x^{k+1}}\displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\,du.$

(b) On vient d'écrire $f_k(x)$ sous la forme d'un produit $g(x)h(x)$, où $g(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}}$, et donc $g'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}}$, et $h(x) = \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\,du$, donc $h'(x) = x^k e^{-x}$. On en déduit que $f_k'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}}h(x) + \dfrac{1}{x^{k+1}}x^k e^{-x} = -\dfrac{k+1}{x}f_k(x) + \dfrac{e^{-x}}{x}$. On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que $f_k' = -f_{k+1}$.

(c) On étudie la fonction $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$ sur $\mathbb{R}^+$. sa dérivée vaut $e^{-y} - 1$, qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour $y = 0$, la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc $f_k(x) - f_k(0) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx}\,dt - \int_0^1 t^k\,dt = \int_0^1 t^k(e^{-tx} - 1)\,dt \geqslant \int_0^1 t^{k+1}x\,dt = \dfrac{x}{k+2}$. Quand x tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs $f_k(x) - f_k(0)$ est négatif puisque f_k est décroissante, la fonction f_k est bien continue en 0.

Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement de la dérivée ! La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_k' = -f_{k+1}$. On vient de voir que f_{k+1} était continue en 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \dfrac{1}{k+2}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f_k'(x) = -\dfrac{1}{k+2}$ puis que f_k est dérivable en 0, de dérivée $f_k'(0) = -\dfrac{1}{k+2}$. Les courbes des fonctions f_k sont assez décevantes, mais voici l'allure des quatre premières (f_0 à f_3, de haut en bas), les valeurs et tangentes en 0 correspondant évidemment aux valeurs calculées) :



Exercice 8 (**)

- Le but est donc de faire apparaitre une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un $\frac{1}{n}$ de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de $\frac{k}{n}$ uniquement : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que (u_n) converge et que sa limite vaut $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.
- Même méthode : $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$, donc (v_n) converge vers $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1$.
- Pour w_n, c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier $\ln(w_n)$ et surtout se rendre compte que $\ln(n!) = \ln(1\times 2\times\cdots\times n) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$. On a alors : $\ln w_n = \frac{1}{n}(\ln((2n)!) - n\ln n - \ln(n!)) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{k=2n}\ln k - n\ln n - \sum_{k=1}^{k=n}\ln k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{k=2n}(\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{k=2n}\ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\frac{n+k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, donc $(\ln w_n)$ converge vers $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_1^2 \ln u\,du = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$, et (w_n) converge vers $e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}$.

Exercice 9 (****)

1. En n'oubliant pas l'hypothèse $\pi = \frac{p}{q}$, $P_n(X-\pi) = \frac{1}{n!}\left(\frac{p}{q}-X\right)^n(p-p+qX)^n = \frac{1}{n!}\frac{p-qX)^n}{q^n}\times q^nX^n = P_n(X)$.
2. Si $\pi = \frac{p}{q}$, $p-qt$ est positif sur $[0,\pi]$, donc l'intégrale est celle d'une fonction positive, elle est positive.
3. Prouvons-le pour 0 : comme il est racine de multiplicité n de P_n, il annule déjà toutes les dérivées k-èmes lorsque $k < n$. Supposons désormais $k > n$, en appliquant la formule de Leibniz au produit $X^n(p-qX)^n$, la seule dérivée de X^n ne s'annulant pas en 0 est la dérivée n-ème, qui vaut $n!$, donc $P_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n}{k}n!((p-qX)^n)^{(k-n)}(0)$. Les $n!$ se simplifient, le coefficient binômial est un entier, il suffit de prouver que la dérivée restante est aussi entière. Elle sera nulle si $k-n > n$, soit $k < 2n$, sinon $((p-qX)^n)^{(k-n)} = n(n-1)\dots(2n-k+1)(p-qX)^{2n-k}$, qui prend pour valeur en 0 le nombre $\frac{n!}{(2n-k)!}p^{2n-k}$, qui est certainement un entier. On a bien prouvé que $P_n^{(k)}(0)$ était toujours un entier. Comme $P_n(\pi-X) = P_n(X)$, $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^kP_n^{(k)}(0)$ est également un entier.
4. Pour $n=0$, $I_0 = \int_0^\pi \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^\pi = 2 \in \mathbb{N}$. Prenons maintenant un entier supérieur ou égal à 1, et effectuons deux intégrations par partie successives (en dérivant P_n à chaque fois), en exploitant le fait que P_n s'annule en 0 et en π (c'est le cas de tous les polynômes P_n à partir de $n=1$) et, comme on vient de le voir, que les dérivés P_n' prennent des valeurs entières en 0 et en π. On calcule donc $I_n = [-P_n(t)\cos(t)]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)\,dt = \int_0^\pi O_n'(t)\cos(t)\,dt$

(le crochet s'annule) $= [P_n'(t)\sin(t)]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi P_n''(t)\sin(t)\ dt = -\int_0^\pi P''(t)\sin(t)\ dt$. Bon, ben il ne reste plus qu'à recommencer, en faisant attention au fait que les crochets ne vont pas continuer à tous s'annuler : à l'étape suivante $P''(t)\cos(t)$ ne s'annule plus en 0 et en π. Par contre ce qui est certain, c'est qu'il prend une valeur entière en 0 et en π, donc on peut écrire $I_n = a_3 - \displaystyle\int_0^\pi P^{(3)}(t)\cos(t)\ dt = a_3 + \int_0^\pi P^{(4)}(t)\sin(t)\ dt$, avec $a_3 \in \mathbb{Z}$. Et on continue. À chaque étape, le premier crochet donnera un nombre entier, et le second s'annulera, pour donner $I_n = a_{2k-1} + (-1)^k \displaystyle\int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt$, avec $a_{2k-1} \in \mathbb{Z}$. Pour être rigoureux, ça se démontre bien sûr par récurrence : on a vu plus haut que c'était vrai pour $k = 1$ et $k = 2$ et en le supposant au rang k, avec deux IPP de plus, $I_n = a_{2k-1} + \displaystyle\int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt = a_{2k-1} + [(-1)^{k+1}P^{(2k)}(t)\cos(t)] + (-1)^k \int_0^\pi P^{(2k+1)}(t)\cos(t)\ dt = a_{2k+1} + [(-1)^k P^{(2k+1)}(t)\sin(t)]_0^\pi + (-1)^{k+1}\int_0^\pi P^{(2k+2)}(t)\sin(t)\ dt$, où a_{2k+1} est égal à a_{2k-1} plus la valeur du crochet avec le cosinus, ce qui donne bien à nouveau un nombre entier. Par principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier k, et en particulier pour $k = n$, valeur pour laquelle $\displaystyle\int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt = 0$, puisque $P^{(2n)} = 0$. Il ne reste plus alors que $I_n = a_{2n-2} \in \mathbb{Z}$. Comme par ailleurs $I_n \geqslant 0$, $I_n \in \mathbb{N}$.

5. La fonction $x \mapsto x(p - qx)$ étant continue sur $[0, \pi]$, elle y atteint un maximum M (qu'on peut d'ailleurs calculer explicitement si on le souhaite), donc $P_n(t) \leqslant \dfrac{1}{n!}M^n$ sur $[0, \pi]$, et $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \frac{M^n}{n!}\sin(t)\ dt = \frac{2M^n}{n!}$, qui a une limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Puisque la suite est constituée de nombres entiers, elle est forcément nulle à partir d'un certain rang n_0 (par application de la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on doit avoir $-\dfrac{1}{2} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ à partir d'un certain rang, donc $I_n = 0$). Mais comme on a vu que la fonction sous l'intégrale était toujours positive sur $[0, \pi]$, avoir une intégrale nulle signifie que $P_n(t)\sin(t)$ vaut toujours 0 entre 0 et π. En particulier, le polynôme P_n doit s'annuler une grosse infinité de fois (puisque sin ne s'annule qu'une seule fois sur l'intervalle), ce qui implique que P_n est le polynôme nul. Voilà une grosse absurdité, P_n n'est manifestement pas égal à 0, donc notre hypothèse de départ est fausse et π ne peut pas être rationnel.

Exercice 10 (***)

1. Allons-y : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
2. Il suffit de penser à effectuer le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ (donc $du = -dt$), qui se contente d'échanger les bornes de l'intégrale et surtout de transormer le sin en $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \cos(u)$. On obtient alors immédiatement $I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\cos^n(u)\ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u)\ du$.
3. Il faut penser pour l'IPP à poser $u(t) = \sin^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \sin(t)$, donc $u'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^(t)$ et $v(t) = -\cos(t)$, pour obtenir $I_n = [-\cos(t)\sin^n(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\ dt = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))\sin^n(t)\ dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) - \sin^{n+2}(t)\ dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. On en déduit que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, soit $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

4. D'après la question précédente, $I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} I_{2p-4} = \dots$
$= \dfrac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} I_0 = \dfrac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 2\times 1}{(2p^2)(2p-2)^2\dots 2^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p^2(p-1)^2\dots 1^2} \times$
$\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2}$. De même, $I_{2p+1} = \dfrac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3} \times I_1 = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
5. Puisque le sinus est positif entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ (et évidemment plus petit que 1), on a $\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$ sur cet intervalle, donc par intégration $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite est donc décroissante. Elle est positive donc minorée, donc convergente.
6. Il suffit d'appliquer la décroissance de la suite (I_n) pour obtenir $\dfrac{I_n}{I_n} \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n+2}}$, soit $1 \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \dfrac{n+1}{n+2}$ en reprenant le résultat de la question 3. Puisque le membre de droite a pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.
7. Plusieurs possibilités ici. Soit on reprend les formules obtenues à la question 4 et on constate de grosses simplifications : $I_{2n+1}I_{2n} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} = \dfrac{\pi}{2\times(2n+1)}$, et de même $I_{2n}I_{2n-1} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \times \dfrac{2^{2n-2}(n-1!)^2}{(2n-1)!} = \dfrac{2n\pi}{2^3n^2} = \dfrac{\pi}{2\times 2n}$. Dans les deux cas, que n soit pair ou impair, $I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.
Autre possibilité, constater que $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$ en reprenant la relation de la question 3, donc la suite $((n+1)I_{n+1}I_n)$ est constante égale à son premier terme $I_1I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 11 (***)

1. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ étant paire, $\displaystyle\int_{-x}^0 e^{t^2}\,dt = \int_0^x e^{t^2}\,dt$, et $f(-x) = -f(x)$ (attention à l'inversion des bornes dans l'intégrale !), le facteur e^{-x^2} restant lui inchangé.
2. On peut très simplement dériver f comme un produit, la dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ étant égale à e^{x^2}. On obtient alors $f'(x) = -2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + e^{-x^2}e^{x^2} = -2xf(x) + 1$. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
3. C'est loin d'être évident (bien sûr, d'après la question précédente, cela revient à montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, mais ce n'est pas plus facile). On commence par effectuer une IPP sur $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt$ (pour faire apparaitre le terme prépondérant dans $f(x)$, méthode classique même si c'est assez brutal ici, et qu'on est obligés de partir de 1 et pas de 0 vu le calcul qu'on va faire ensuite) en posant $u'(t) = 2te^{t^2}$, donc $u(t) = e^{t^2}$, et $v(t) = \dfrac{1}{2t}$, donc $v'(t) = -\dfrac{1}{2t^2}$, pour obtenir $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,dt$. On en déduit que $1 - 2xf(x) = 1 - 2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}\,dt - 2xe^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt + exe^{-x^2} +$ $xe^{-x^2}\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt$. Le premier terme a une limite nulle par croissance comparée (l'intégrale de 0 à 1 étant une constante), le deuxième terme tend également vers 0 (toujours de la

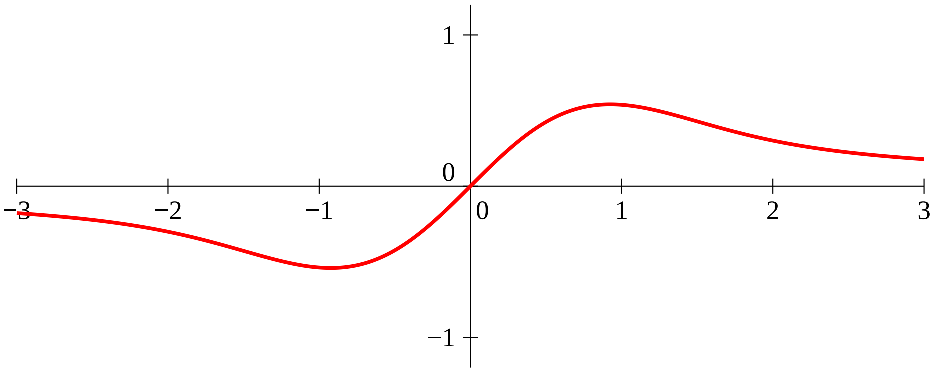
croissance comparée). Reste le troisième. Le dernier morceau (avec l'intégrale de 1 à x), pose encore des problèmes : on a bien envie de majorer la fonction dans l'intégrale pour obtenir quelque chose de calculable qui tend vers 0, mais en majorant e^{t^2} par e^{x^2} sur $[1, x]$, par exemple, la majoration obtenue n'est pas suffisante (on majore par une constante). Il vaut mieux couper en deux sous la forme $xe^{-x^2}\displaystyle\int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt + xe^{-x^2}\int_{x-1}^{x} \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt$. Dans le premier morceau (en supposant $x \geqslant 2$), on majore e^{t^2} par $e^{(x-1)^2}$ et $\dfrac{1}{t^2}$ par 1 pour trouver $xe^{-x^2}\displaystyle\int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt \leqslant xe^{-x^2} \times e^{(x-1)^2}\int_1^{x-1} 1\, dt = x(x-2)e^{-2x+1}$. Cette quantité a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$ (encore de la croissance comparée). Dans le dernier morceau, on se contente de majorer le numérateur, en gardant le dénominateur intact : $xe^{-x^2}\displaystyle\int_{x-1}^{x} \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt \leqslant x\int_{x-1}^{x} \frac{1}{t^2}\, dt = x\left[-\frac{1}{t}\right]_{x-1}^{x} = x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$. Ouf, ça tend encore vers 0, et achève notre démonstration : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$!

4. Au vu de la relation trouvée à la deuxième question, $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x}(1-2xf(x)) = \dfrac{e^{x^2}}{2x} - \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$. On dérive pour obtenir $g'(x) = \dfrac{4x^2e^{x^2} - 2e^{x^2}}{4x^2} - e^{x^2} = -\dfrac{e^{x^2}}{2x^2} < 0$, donc la fonction g est effectivement décroissante. Étant continue, elle est nécessairement bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ vers un intervalle inconnu. Comme $f(0) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} 1 - 2xf(x) = 1$, et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$. Inutile de chercher la limite de g en $-\infty$, puisque l'énoncé prétend que la fonction s'annule entre 0 et 1, vérifier que $g(1) < 0$ suffit, ce qui découle du fait que $1 - 2f(1) < 0$. Or, $1 - 2f(1) = 1 - \dfrac{2}{e}\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}\, dt$. Il faudrait donc que $\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}\, dt > \frac{e}{2}$. Malheureusement, cette intégrale n'est pas calculable de façon exacte. On en connait toutefois des valeurs approchées précises (par exemple quand on a des tables de loi normale sous la main !), et l'inégalité est effectivement vérifiée (si vous avez beaucoup de temps à perdre, effectuez la méthode des rectangles pour le vérifier).

5. D'après la question précédente, g, et donc f', est positive sur $[0, x_0[$ et négative ensuite. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0, x_0[$, et décroissante ensuite. On sait évidemment que $f(0) = 0$, et les limites de f aux infinis sont nulles puisque $2xf(x)$ tend elle-même vers 0. En utilisant de plus l'imparité de la fonction, on peut dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-x_0$		0		x_0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-f(x_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	0

6. Inutile de chercher à calculer la valeur des extrema, mais on sait déjà que $f(1) \geqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui donne une borne inférieure (vu le peu d'écart entre les deux valeurs, on peut se douter que x_0 est proche de 1 et le maximum proche également de $\dfrac{1}{2}$). La courbe représentative de f ressemble en fait à ceci :



Problème 1 (***)

1. On va bien entendu procéder par IPP. Pour la première intégrale, on pose donc $v(t) = t$ pour avoir $v'(t) = 1$, et $u'(t) = \cos(kt)$ qu'on peut par exemple primitiver en $u(t) = \dfrac{\sin(kt)}{k}$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^\pi t\cos(kt)\ dt = \left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kt)}{k}\ dt = 0 - \left[-\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi = \frac{\cos(k\pi)-1}{k^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$. Notons I_k la deuxième intégrale à calculer, et faisons une première IPP en posant $v(t) = t^2$, donc $v'(t) = 2t$, et $u'(t) = \cos(kt)$ pour prendre $u(t) = \dfrac{\sin(kt)}{k}$. On trouve alors $I_k = \dfrac{1}{k}[t^2\sin(kt)]_0^\pi - \dfrac{1}{k}\int_0^\pi 2t\sin(kt)\ dt = -\dfrac{2}{k}\displaystyle\int_0^\pi t\sin(kt)\ dt$. Eh bien, on est repartis pour une IPP, en posant cette fois $v(t) = t$, $v'(t) = 1$, $u'(t) = \sin(kt)$ et $u(t) = -\dfrac{\cos(kt)}{k}$. On obtient maintenant $I_k = \dfrac{2}{k^2}[t\cos(kt)]_0^\pi - \dfrac{2}{k^2}\displaystyle\int_0^\pi \cos(kt)\ dt = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2} - \frac{2}{k^3}[\sin(kt)]_0^\pi = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}$.
2. On peut effectuer une sorte d'identification, mais ce n'est pas vraiment nécessaire : on prend $a = -1$ pour faire apparaitre $\dfrac{1}{k^2}$ dans la première intégrale (c'est le seul endroit où on a une valeur qui ne dépend pas de la parité de k), puis $b = \dfrac{1}{2\pi}$ pour annuler justement le terme en $(-1)^k$. En effet, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^\pi \left(-t + \frac{1}{2\pi}t^2\right)\cos(kt)\ dt = \frac{1-(-1)^k}{k^2} + \frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{k^2}$, ce qu'on voulait.
3. Toujours par linéarité, $\displaystyle\int_0^\pi (at+bt^2)S_n(t)\ dt = \int_0^\pi at + bt^2\ dt + 2\sum_{k=1}^n \int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)\ dt = C + 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, en posant $C = \displaystyle\int_0^\pi at + bt^2\ dt = \left[\frac{at^2}{2} + \frac{bt^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{a\pi^2}{2} + \frac{b\pi^3}{3} = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}$.
4. C'est un calcul classique pour lequel on va passer par les complexes : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}\,(e^{ikt}) = \mathrm{Re}\,(e^{it}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt})$. On reconnait une somme géométrique de raison e^{it}, donc différente de 1 à condition d'avoir $t \not\equiv 0[2\pi]$. On obtient donc $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(e^{it} \times \frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right) =$

$\text{Re}\left(e^{it}\dfrac{e^{i\frac{nt}{2}}(e^{-i\frac{nt}{2}}-e^{i\frac{nt}{2}})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-i\frac{t}{2}})-e^{i\frac{t}{2}}}\right)=\text{Re}\left(e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\times\dfrac{-2i\sin(\frac{nt}{2})}{-2i\sin(\frac{t}{2})}\right)=\dfrac{\cos(\frac{(n+1)t}{2})\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$. Il est temps de recourir à une de nos formules de trigonométrie préférées pour modifier le numérateur : la transformation produit-somme $\cos(a)\sin(b)=\dfrac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$, ce qui donne ici $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})-\sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}-1\right)$. Il suffit de multiplier par 2 et d'ajouter 1 pour avoir la formule de l'énoncé. Enfin, on a clairement $\displaystyle S_n(0)=1+2\sum_{k=1}^{n}1=2n+1$.

5. Notons f la fonction correspondante, $f(t)=\dfrac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})}\times(2a+2bt)$. On sait que $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sin(t)}{t}=1$ (taux d'accroissement de la fonction sinus en 0), donc $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})}=1$, et $\displaystyle\lim_{t\to0}f(t)=2a=-2$ (puisque rappelons-le, on a posé $a=-1$). Calculons la dérivée de la fonction f (pour utiliser l'indication de l'énoncé, c'est plus facile qu'avec le taux d'accroissement) : $f'(t)=\dfrac{(a+2bt)\sin(\frac{t}{2})-\frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})(at+bt^2)}{\sin^2(\frac{t}{2})}=\dfrac{t^2}{\sin^2(\frac{t}{2})}\times g(t)$, en posant $g(t)=\dfrac{a\sin(\frac{t}{2})}{t^2}+\dfrac{2b\sin(\frac{t}{2})}{t}-\dfrac{a\cos(\frac{t}{2})}{2t}-\dfrac{1}{2}b\cos(\frac{t}{2})$. Dans cette fonction g, le deuxième terme tend vers b (en utilisant toujours le taux d'accroissement du sinus), et le dernier vers $-\dfrac{b}{2}$. On peut regrouper les deux restants sous la forme $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\frac{2\sin(\frac{t}{2})}{t}-\cos(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}}$, qui tend vers 0 en utlisant l'indication de l'énoncé (sans, on n'avait aucune chance de s'en sortir). On en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to0}g(t)=\frac{b}{2}=\frac{1}{4\pi}$. Le facteur qui se trouvait devant $g(t)$ dans le calcul de f' a lui pour limite 4 (encore et toujours notre taux d'accroissement, qu'on a élevé au carré en plus de l'inverser ici), donc $\displaystyle\lim_{t\to0}f'(t)=\frac{1}{\pi}$. Le théorème de prolongement de la dérivée assure que la fonction f est dérivable en 0 (et que $f'(0)=\dfrac{1}{\pi}$), et donc que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ (elle est bien entendue continue et dérivable partout ailleurs qu'en 0).

6. Effectuons donc une IPP en posant $v'(t)=\sin(kt)$ et par exemple $v(t)=\dfrac{\cos(kt)}{k}$, et en dérivant la fonction g : $\displaystyle\int_0^\pi g(t)\sin(kt)\ dt=\left[\frac{g(t)\cos(kt)}{k}\right]_0^\pi-\frac{1}{k}\int_0^\pi g'(t)\cos(kt)\ dt$. Puisque la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, sa dérivée g' est majorée en valeur absolue par une constante M sur cet intervalle. Comme par ailleurs on a toujours $|\cos(kt)|\leqslant1$, l'intégrale de droite est majorée par $\displaystyle\int_0^\pi M\ dt=M\pi$. Une fois divisée par k, ce terme va manifestement tendre vers 0. Mais le crochet aussi, puisque son numérateur est alternativement égal à $-g(\pi)-g(0)$ et à $g(\pi)-g(0)$ (si k est un entier, sinon il est majoré en valeur absolue par $|g(\pi)|+|g(0)|$, et ça marche tout de même), deux constantes qui ne peuvent que donner une limite nulle quand on les divise par k. Bref, l'énoncé a raison, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^\pi g(t)\sin(kt)\ dt=0$ (on peut tenter une interprétation géométrique de ce résultat : quand on multiplie par des sinus d'amplitude de plus en plus petite, on tend avoir une valeur moyenne qui tend vers 0, ce qui est cohérent puisque le sinus qui oscille entre -1 et 1 a tendance à « répartir » les valeurs symétriquement par rapport à l'axe des abscisses).

7. En appliquant le résultat de la question précédente à la question f (on s'est fatigué à prouver

qu'elle était $\mathcal{C}^1$, il faut bien que ça serve) et avec des valeurs de k de la forme $\dfrac{2n+1}{2}$, on peut affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi S_n(t)(at+bt^2)\ dt = 0$, et donc (d'après la question 3) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(C+2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right) = 0$, c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = -\frac{C}{2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Problème 2 (***)

1. Allons-y dans la joie et la bonne humeur :
   - si f est impaire, $I(f)=0$ (intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0), et $S(f) = \dfrac{-f(1)+4f(0)+f(1)}{3} = 0$. Au moins un cas où la méthode est efficace !
   - si $f(t)=t^4$, $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^1 t^4\ dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{5}$, alors que $S(f) = \dfrac{1+0+1}{3} = \dfrac{2}{3}$. C'est clairement moins précis (et même franchement mauvais comme approximation).
   - si $f(t) = \dfrac{1}{t+2}$, $I(f) = [\ln(t+2)]_{-1}^1 = \ln(3) \simeq 1.1$, et $S(f) = \dfrac{1+4\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3} = \dfrac{10}{9}$, ce qui est très proche de $\ln(3)$.
   - si $f(t) = \dfrac{1}{t^2+2t+3}$, $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(t+1)^2+2}\ dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}}(t+1))^2+1}\ dt$ $= \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan(t+1)\right]_{-1}^1 = \dfrac{\arctan(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \simeq 0.68$ (oui, à la calculatrice, ce n'est pas une valeur remarquable) ; et $S(f) = \dfrac{\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{3} = \dfrac{1}{6}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{15} = \dfrac{15+40+6}{90} = \dfrac{61}{90} \simeq 0.68$. Pas mal, cette méthode, quand même.
2. Pour $f(x)=x$ et $f(x)=x^3$, l'égalité découle de l'imparité de ces deux fonctions. Lorsque $f(x)=1$, on a simplement $I(f)=2$ et $S(f) = \dfrac{6}{3} = 2$, ça marche aussi. Enfin, pour $f(x)=x^2$, $I(f) = \dfrac{2}{3}$, et $S(f) = \dfrac{2}{3}$, il y a toujours égalité. L'égalité restera vraie pour tout polynôme de degré 3 par linéarité de l'intégrale et du calcul de $S(f)$: si $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, alors $S(f) = aS(x^3)+bS(x^2)+cS(x)+dS(1)$ (c'est évident), et de même pour $I(f)$.
3. Posons donc $P_f = aX^3+bX^2+cX+d$, et écrivons les quatre conditions demandées : $P_f(-1) = -a+b-c+d$, donc $-a+b-c+d = f(-1)$; puis $f(0) = P_f(0) = d$; $f(1) = P_f(1) = a+b+c+d$; et enfin $f'(0) = P_f'(0) = c$ (puisque $P_f' = 3aX^2+2bX+c$). Le système a effectivement une solution (unique) et se résout très facilement : $d = f(0)$, $c = f'(0)$, puis $a+b = f(1)-f(0)-f'(0)$ et $b-a = f(-1)-f(0)+f'(0)$. En faisant la somme et la différence (et en divisant par deux), on a donc $b = \dfrac{f(-1)+f(1)}{2} - f(0)$, et $a = \dfrac{f(1)-f(-1)}{2} - f'(0)$.
4. (a) On calcule $h'(x) = f'(x) - P_f'(x) - 2kx(x^2-1) - 2kx^3$. Comme $f'(0) = P_f'(0)$ par définition, et que le reste de la dérivée s'annule en 0, on a bien $h'(0)=0$.

   (b) Il y en a pas moins de quatre : $h(\alpha)=0$, c'est dit dans l'énoncé, mais aussi $h(-1) = h(0) = h(1) = 0$ puisque ces trois valeurs annulent $x^2(x^2-1)$, et vérifient par hypothèse $P_f(x) = f(x)$.

   (c) Appliquons donc intelligemment (ou pas en fait) le théorème de Rolle sur chacun des trois intervalles $[-1,0]$, $[0,\alpha]$ et $[\alpha,1]$. Sur chaque intervalle, la fonction h est continue et prend la même valeur aux bornes (en l'occurrence 0), donc il existe trois réels $\beta\in]-1,0[$, $\gamma\in]0,\alpha[$ et $\delta\in]\alpha,1[$ tels que $h'(\beta) = h'(\gamma) = h'(\delta) = 0$. On ajoute la valeur α qui est distincte des trois autres, et on a bien quatre valeurs d'annulation distinctes pour h' dans $]-1,1[$.

(d) Appliquons donc désormais le théorème de Rolle à la fonction h' (qui est continue) sur les intervalles $[\beta, \gamma]$, $[\gamma, \alpha]$ et $[\alpha, \delta]$ pour trouver trois valeurs distinctes ε, ζ et η annulant h'. Devinez quoi ? On va appliquer ce bon vieux théorème de Rolle à la fonction h'' sur les intervalles $[\varepsilon, \zeta]$ et $[\zeta, \eta]$ pour trouver deux valeurs d'annulation distinctes de h''', qu'on appellera bien entendu θ et ι (bonne révision de l'alphabet grec). Un dernier coup de Rolle pour la route, appliqué à h''' sur l'intervalle $[\theta, \iota]$, et nous voila avec une valeur d'annulation κ de $h^{(4)}$. Ah mince, l'énoncé l'appelle β, on va quand même le respecter. Reste à regarder ce qui se passe quand on dérive quatre fois la fonction h : P_f étant un polynôme de degré 3, sa dérivée quatrième est nulle, et $kx^2(x^2-1) = kx^4 - kx^2$ a pour dérivée quatrième $4!k$, donc $h^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) - 4!k$. Appliquée pour $x = \beta$, cette relation nous donne $0 = f^{(4)}(\beta) - 4!k$, soit $k = \dfrac{f^{(4)}}{4!}$.

(e) Il suffit de se rappeler que $h(\alpha) = 0$ pour écrire $f(\alpha) - P_f(\alpha) = k\alpha^2(\alpha^2 - 1)$, et en déduire la majoration demandée ($f^{(4)}(\beta)$ étant par définition inférieur à M_4).

5. On vient de prouver que c'était vrai pour tout $\alpha \in]0,1[$. Il reste à constater que ça le reste pour $t = 0$ et $t = 1$ de façon triviale puisque dans ce cas le membre de gauche vaut 0 (et celui de droite aussi d'ailleurs).

6. Par définition, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = I(f)$. En reprenant les notations de la question 3, $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_f(t)\,dt = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\right]_{-1}^{1} = \frac{2b}{3} + 2d = \frac{f(-1)+f(1)}{3} - \frac{2f(0)}{3} + 2f(0) = \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3} = S(f)$ (incroyable, non ?). On peut donc écrire $\displaystyle |I(f) - S(f)| = \left|\int_{-1}^{1} f(t) - P_f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(t) - P_f(t)|\,dt \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{M_4}{4!} t^2(1-t^2)\,dt = \frac{M_4}{24}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{M_4}{24}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{M_4}{4!} \times \frac{4}{15} = \frac{M_4}{90}$.

7. On a fait les calculs plus haut : dans ce cas, $|I(f) - S(f)| = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$. Or, on a dans ce cas $f^{(4)}(t) = 24$, donc $\dfrac{M_4}{90} = \dfrac{24}{90} = \dfrac{4}{15}$. On ne peut donc pas faire mieux comme majoration.