Feuille d'exercices n°22 : Géométrie dans l'espace

PTSI B Lycée Eiffel

21 juin 2018

Exercice 1 (*)

Soient $A(0,1,2)$; $B(-1,1,1)$; $C(2;-1;2)$; $D(4;0;-1)$ et $E(1;2;-2)$ cinq points de l'espace.

1. Calculer les distances AB, AD, BC et BE.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CE}$.
3. Déteminer les produits vectoriels $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{CE}$.
4. Calculer les produits mixtes $[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}]$ et $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$. En déduire le volume du parallélépipède engendré par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 2 (**)

Prouver la formule du double produit vectoriel : $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$.
En déduire l'identité $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} + (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \wedge \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 3 (***)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs fixés. Déterminer tous les vecteurs $\overrightarrow{x}$ tels que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$.

Exercice 4 (**)

Soient A, B et C trois points de l'espace, et I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Montrer que les égalités suivantes sont vérifiées quel que soit le point M :

1. $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$.
3. $[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}] = [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MA}]$.

Exercice 5 (**)

Soit les points $A(1;2;3)$, $B(2;-1;2)$ et $C(0;1;-2)$, les droites $D_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & - & t \\ y & = & 1 & + & 2t \\ z & = & -1 & + & t \end{array} \right.$, et $D_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 3u \\ y & = & & - & 2u \\ z & = & 3 & + & 5u \end{array} \right.$, et les plans $\mathcal{P}_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & - & 2t & + & 3u \\ y & = & -2 & + & t & + & u \\ z & = & 4 & - & t & - & 2u \end{array} \right.$, $\mathcal{P}_2 : 2x - y + 3z - 1 = 0$, et $\mathcal{P}_3 : x + 2z - 4 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$.
2. Déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.
3. Donner une équation cartésienne du plan contenant les points A, B et C.
4. Déterminer l'intersection de D_1 et de $\mathcal{P}_2$.
5. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ contenant D_1 et tel que D_2 soit parallèle à $\mathcal{Q}$.

6. Déterminer $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.
7. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_2$ et de la droite (AB).
8. Donner une équation paramétrique de la droite passant par A, parallèle à $\mathcal{P}_2$ et coupant D_1.
9. Donner une équation cartésienne du plan passsant par C et contenant D_1.
10. Donner une équation paramétrique de la droite, si elle existe, passant par A et sécante avec les deux droites D_1 et D_2.

Exercice 6 (**)

Soit la droite D d'équation paramètrique $\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 4 & + & 2t \\ y & = & 3 & + & t \\ z & = & 1 & + & t \end{array}\right.$

1. Calculer la distance $f(t)$ de O au point $M(t)$ de paramètre t de D : déterminer la valeur de t pour laquelle cette distance est minimale. En déduire les coordonnées de H, projection orthogonale de O sur D. Que vaut la distance de O à D ?
2. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2z = 2$ contient la droite D. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ contenant D et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
3. Calculer la distance de O à $\mathcal{P}$ et retrouver celle de O à D.

Exercice 7 (**)

On se place dans un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, de façon à avoir $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$ et $E(0,0,1)$.

1. Déterminer les coordonnées des quatre sommets restants.
2. Déterminer les longueurs des diagonales de face (par exemple AC) et des grandes diagonales (par exemple AG) du cube.
3. Déterminer les projetés orthogonaux du point A sur chacune des diagonales de face et des grandes diagonales, et en déduire la distance de A à chaque diagonale.
4. Déterminer l'aire des triangles AGH et AFH.
5. Déterminer l'angle formé par chaque diagonale (de face ou grande) avec chaque face du cube.
6. Déterminer le volume des tétraèdres $ABFG$, $OFGH$ (O étant le centre du cube) et $AIJO$ (I étant le milieu de $[EF]$ et J le centre de la face (BCF)).
7. Montrer que le plan passant par O et perpendiculaire à (AG) a une intersection avec le cube qui est un hexagone régulier.

Exercice 8 (** à ***)

Dans un tétraèdre régulier de côté 1, déterminer :

- la hauteur du tétraèdre (distance entre un sommet et son projeté orthogonal sur la face opposée).
- le volume du tétraèdre.
- la distance entre deux arêtes non coplanaires.
- l'angle entre deux faces.

Exercice 9 (*)

Donner une équation cartésienne de chacune des sphères suivantes (en précisant leur centre et leur rayon), et étudier leur intersection avec le plan $\mathcal{P} : x + y + z - 3 = 0$, ainsi que leurs intersections deux à deux :

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$

- $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 12 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + \frac{3}{2} = 0$

Exercice 10 (**)

Déterminer le centre A et le rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre dont les faces ont pour équations cartésiennes $x + y + z = 0$, $x + y - z = 2$, $x - y + z = 4$ et $-x + y + z = 6$ (on pourra commencer par déterminer les coordonnées des sommets du tétraèdre).

Exercice 11 (***)

Pour tout réel m, on considère l'ensemble $\mathcal{S}_m$ des points qui vérifiant l'équation

$$x^2 - (2m+2)x + y^2 + (2m-2)y + z^2 - 4mz - 6m - 4 = 0$$

1. Vérifier que, pour tout m, $\mathcal{S}_m$ est une sphère dont on précisera le centre O_m et le rayon R_m.
2. Quel est le lieu décrit par les centres O_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?
3. Deux sphères de la famille peuvent-elle avoir le même centre ? Le même rayon ? À quelles conditions ?
4. Déterminer l'ensemble des points appartenant simultanément à toutes les sphères $\mathcal{S}_m$.
5. Déterminer l'ensemble des points par lesquels ne passe aucune des sphères $\mathcal{S}_m$.
6. Donner, pour tout réel m, une équation du plan $\mathcal{P}_m$ passant par O_m et perpendiculaire à (OO_m).
7. Déterminer l'ensemble des points appartenant à tous les plans $\mathcal{P}_m$.
8. Caractériser l'intersection $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{S}_m$.
9. Montrer que, si $m \neq m'$, $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{P}_{m'}$ est une droite dont on donnera une équation paramétrique.
10. Donner une équation de l'ensemble $\mathcal{Q}$ des points par lesquels passe au moins un plan $\mathcal{P}_m$. Le point O appartient-il à $\mathcal{Q}$?

Exercice 12 (***)

On considère, dans un repère orthonormé, les points $A(0,0,0)$; $B(2,1,-1)$ et $C(1,1,1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation du plan (ABC).
3. Déterminer le rayon de la sphère de centre $M_k(0,0,k)$ tangente au plan (ABC). Combien y a-t-il de sphères de rayon 2 parmi celles-ci ? On note $\mathcal{S}$ celle correspondant à la plus grande valeur de k.
4. Déterminer l'ensemble des points $D(x,y,z)$ vérifiant $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = 0$ (on en donnera une équation paramétrique).
5. Parmi les points de l'ensemble précédent, combien appartiennent au plan (ABC) ? Que représentent-ils alors ?
6. On note désormais $D(2,-1,1)$. Déterminer la distance de D aux trois points A, B et C, ainsi que le projeté orthogonal de D sur (ABC), et la distance de D à ce dernier.
7. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.
8. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$, perpendiculaire à (ABC) et à (BCD).
9. Déterminer une équation paramétrique des hauteurs issues de A et D (droites passant par le point et perpendiculaires à la face opposée) dans le tétraèdre $ABCD$. Montrer que ces droites sont sécantes en un point H appartenant également à la hauteur issue de B.
10. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'unique droite perpendiculaire simultanément à (AD) et à (BC) et vérifier que H appartient à cette droite.