

Feuilles d'exercices n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

21 septembre 2017

Vrai-Faux

1. C'est faux, au contraire, elle est inférieure quand x est négatif.
2. Faux, ça devrait être $f'(f^{-1}(x))$ au dénominateur.
3. Encore faux, si $a < 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante.
4. Vrai!
5. Encore vrai!

Exercice 1 (*)

1. Il faut résoudre l'inéquation $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$. Le trinôme correspondant a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$ et $x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$. Le trinôme étant positif en-dehors des racines, $\mathcal{D}_f =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [2; +\infty[$.
2. L'exponentielle est là pour faire joli, ce qui est important c'est d'avoir $x+5 > 0$, soit $x > -5$, donc $\mathcal{D}_f =]-5; +\infty[$.
3. Le dénominateur interdit les valeurs -2 et 2 . Reste à vérifier quand le numérateur est positif. C'est le cas en-dehors de ses racines 0 et -1 , donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 0] \cup [1; 2[\cup]2; +\infty[$.
4. Il faut déterminer quand $x^5 + 1 > 0$, autrement dit quand $x^5 > -1$. Or, on sait que $x \mapsto x^5$ est une fonction strictement croissante, et que $(-1)^5 = -1$, donc $x^5 > -1 \Leftrightarrow x > -1$ et $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

Exercice 2 (* à **)

1. La fonction f est paire (elle est somme de fonctions puissances paires).
2. La fonction f est définie sur \mathbb{R}^* et paire puisque $\forall x \neq 0, f(-x) = \ln(|-x|) = \ln(|x|) = f(x)$.
3. Cette fonction très laide est paire : elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$ (ce qui est sous la racine est toujours strictement positif; par contre les trois valeurs enlevées annulent le premier dénominateur) et $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = \frac{1}{((-x)^3 - 2 \times (-x))^2} \times \frac{(-x)^4}{\sqrt{(-x)^2 + 2}} = \frac{1}{(2x - x^3)^2} \times \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}} = f(x)$ car $(2x - x^3)^2 = (x^3 - 2x)^2$ (prendre la carré d'un nombre ou de son opposé donne toujours le même résultat).
4. Cette fonction est définie sur $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, et elle est paire : $f(-x) = |2(-x)^2 - e^{(-x)^4} + \ln((-x)^2 - 1)| = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)| = f(x)$.
5. Cette dernière fonction est définie sur $] -1; 1[$, et elle est impaire : $f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$ (on a simplement utilisé le fait que $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$).

Exercice 3 (** à ***)

- En posant $X = x^2$, on se ramène à l'équation $X^2 + X - 20 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 80 = 81$, donc admet deux racines $X_1 = \frac{-1+9}{2} = 4$ et $X_2 = \frac{-1-9}{2} = -5$. La valeur -5 est à éliminer pour x^2 , donc on a nécessairement $x^2 = 4$, d'où $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$.
- Cette équation du troisième degré admet -1 comme racine évidente : $(-1)^3 - 5(-1)^2 + 2(-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$. On peut donc factoriser sous la forme $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. Par identification des coefficients, on trouve les conditions $a = 1$, puis $a + b = -5$, soit $b = -6$; $b + c = 2$, soit $c = 8$, ce qui est cohérent avec la valeur du coefficient constant. Le trinôme $x^2 - 6x + 8$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 32 = 4$, et admet comme racines $x_1 = \frac{6-2}{2} = 2$, et $x_2 = \frac{6+2}{2} = 4$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-1; 2; 4\}$.
- L'inéquation est définie lorsque $x+2$ et $3x-6$ sont tous deux strictement positifs, donc pour $x > 3$. Elle revient alors à $\ln \frac{x+2}{2x-6} \leq \ln 2$, soit $\frac{x+2}{2x-6} \leq 2$, donc $\frac{-3x+14}{2x-6} \leq 0$. Comme $2x-6$ a déjà été supposé positif, $\mathcal{S} = \left[\frac{14}{3}; +\infty \right[$.
- En faisant tout passer à gauche, on se ramène à $\frac{-5x-11}{x^3+2x^2-5x-6} \geq 0$. Le signe du numérateur est facile à obtenir, mais pour le dénominateur il faut commencer par le factoriser. On constate que -1 est racine du dénominateur : $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$. On peut donc écrire $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. Par identification des coefficients, on a $a = 1$, $b = 1$ et $c = -6$, donc $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2 + x - 6)$. Le dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$ et admet deux racines $x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$. On peut désormais faire un gros tableau de signes :

x	-3	$-\frac{11}{5}$	-1	2
$-5x - 11$	+	+	0	-
$x^3 + 2x^2 - 5x - 6$	-	0	+	0
Q	-	+	0	-

Conclusion : $\mathcal{S} = \left] -3; -\frac{11}{5} \right] \cup] -1; 2[$.

- Commençons par constater que l'inéquation ne peut avoir de sens que si $x \geq -2$. Lorsque $x \in [-2; 1]$, l'inéquation sera certainement vérifiée puisque le membre de gauche est alors négatif, et le membre de droite positif. Reste le cas $x > 1$, où on peut se permettre de tout élever au carré puisque les deux membres de l'inégalité sont alors positifs : on obtient $x^2 - 2x + 1 \leq x + 2$, soit $x^2 - 3x - 1 \leq 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 9 + 4 = 13$, et s'annule donc en deux valeurs $x_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$. Le trinôme est négatif entre ses racines, donc sur l'intervalle $[x_1; x_2]$. Comme $x_1 < 1$ et $x_2 > 1$, on en déduit concernant notre inéquation initiale que $\mathcal{S} = \left[-2; \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right]$.
- Commençons par remarquer que l'équation n'est définie que sur l'intervalle $]1; +\infty[$. Avant de passer à l'exponentielle, il est indispensable de regrouper les deux \ln de gauche pour n'avoir qu'un seul \ln de chaque côté, ce qui donne $\ln(x^2 + 2x - 3) = \ln 4$, donc $x^2 + 2x - 7 = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 + 28 = 32$, et admet donc deux racines $x_1 + \frac{-2 + 4\sqrt{2}}{2} = -1 + 2\sqrt{2}$, et $x_2 = -2 - 2\sqrt{2}$. La deuxième solution n'appartient pas à l'intervalle de définition, donc $\mathcal{S} = \{2\sqrt{2} - 1\}$.

7. Tout étant positif, on peut passer au \ln : $3 \times 2^{3x-4} \geq 2^4 \Leftrightarrow \ln 3 + (3x-4)\ln 2 \geq 4\ln 2$, soit $(3x-8)\ln 2 \geq -\ln 3$, donc $x \geq \frac{8\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2}$, donc $\mathcal{S} = \left[\frac{8\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2}; +\infty \right[$.
8. Cette inéquation ne peut avoir de sens que si $1-x \geq 0$, soit $x \leq 1$. On peut l'écrire sous la forme $3\sqrt{1-x} \leq 3-x$, et comme le second membre de l'inégalité est toujours positif sur notre intervalle de résolution, on peut élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $9(1-x) \leq (3-x)^2$, soit $9-9x \leq 9-6x+x^2$, ou encore $x^2+3x \geq 0$. Le membre de gauche a pour racines -3 et 0 , il est positif à l'extérieur de ces racines, d'où $\mathcal{S} =]-\infty, -3] \cup [0, 1]$.
9. Commençons pas signaler que l'inéquation n'a de sens que si $2x-3 > 0$, soit $x > \frac{3}{2}$. Ensuite c'est très simple : puisque la fonction \ln est strictement croissante, $\ln(2x-3) \leq \ln 5 \Leftrightarrow 2x-3 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 4$, donc $\mathcal{S} = \left] \frac{3}{2}; 4 \right[$.
10. En faisant passer quelques termes à droite, on obtient $2^{3x-1} = 5^{x+1} - 5^x = 5^x(5-1) = 4 \times 5^x$, soit en prenant le \ln des deux côtés $(3x-1)\ln 2 = \ln 4 + x\ln 5$, donc $x(3\ln 2 - \ln 5) = 3\ln 2$, et $x = \frac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}$, donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5} \right\}$.
11. Cette équation n'a de sens que si $x > 0$ (on peut éventuellement extrapoler que 0 va aussi être solution de l'équation, si on arrive à donner un sens à 0^0). En prenant les \ln , on obtient alors $\sqrt{x} \ln x = x \ln(\sqrt{x}) = x \frac{\ln x}{2}$, donc $\ln x \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) = 0$. On en déduit que soit $\ln x = 0$, c'est-à-dire $x = 1$, soit $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$, auquel cas on obtient en élevant au carré (on peut, tout est positif) $x = \frac{x^2}{4}$, soit $x(x-4) = 0$, donc $x = 4$ (0 ayant été exclu dès le départ). Conclusion : $\mathcal{S} = \{1; 4\}$.
12. Celle-ci est un piège assez vicieux. On ne sait pas vraiment résoudre ce genre d'équation, mais on peut constater que $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3$ est une fonction strictement croissante sur son domaine de définition $]0; +\infty[$, et qu'elle prend pour valeur 0 en 1 . Elle ne peut donc pas s'annuler plus d'une fois et $\mathcal{S} = \{0\}$.
13. Ça doit presque être un réflexe pour ce genre d'équations : on pose $X = e^{-2x}$ et on obtient $X^3 + 3X^2 - X - 3 = 0$. On constate (comme d'habitude) que 1 est racine évidente de l'équation, et on peut donc écrire $(X^3 + 3X^2 - X - 3) = (X-1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$, soit après identification $a = 1$; $b = 4$ et $c = 3$. Reste à résoudre $X^2 + 4X + 3 = 0$, équation ayant pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines réelles $X_1 = \frac{-4+2}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$. Ces deux dernières valeurs n'étant pas très compatibles avec le changement de variable effectué, la seule possibilité restante est $e^{-2x} = 1$, ce qui donne $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
14. Posons $X = 8^{3x}$, on cherche alors à résoudre $X^2 - 3X - 4 \leq 0$, inéquation ayant pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, soit deux racines réelles $X_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{3+5}{2} = 4$. On doit donc avoir $-1 \leq 8^{3x} \leq 4$. La première inégalité est toujours vérifiée, puisque la puissance est nécessairement positive. Quant à la deuxième, elle devient, en passant au \ln , $3x \ln 8 \leq \ln 4$, soit $x \leq \frac{\ln 4}{3\ln 8}$. Comme $\frac{\ln 4}{3\ln 8} = \frac{2\ln 2}{9\ln 2} = \frac{2}{9}$, on a donc $\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{2}{9} \right]$.
15. La deuxième équation du système peut se traduire par $\log(xy) = 4$, soit, en passant à l'exponentielle de base 10 , $xy = 10^4 = 10\,000$. Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $x^2 - 520x + 10\,000 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 520^2 - 40\,000 = 230\,400$, et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{520-480}{2} = 20$ et $x_2 = \frac{520+480}{2} = 500$ (notez qu'on peut facilement vérifier que ces deux nombres sont solutions du problème posé). On a donc $\mathcal{S} = \{(20; 500); (500; 20)\}$.

16. On se contente de tout écrire à l'aide des exponentielles. Quitte à tout multiplier par 2, cela donne $4(e^x + e^{-x}) + 3(e^x - e^{-x}) - 8 = 0$, soit $7e^x - 8 + e^{-x} = 0$. En posant $X = e^x$ (et en multipliant tout par e^x , on se ramène à l'équation du second degré $7X^2 - 8X + 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 64 - 28 = 36$, et ses solutions sont $X_1 = \frac{8+6}{14} = 1$ et $X_2 = \frac{8-6}{14} = \frac{1}{7}$. On trouve donc deux solutions à l'équation initiale : $x = \ln(1) = 0$, et $x = -\ln(7)$.
17. Commençons par signaler que les valeurs -1 et $-\frac{1}{2}$ sont interdites car elles annulent les expressions dans les \ln , puis regroupons le membre de gauche dans un seul \ln de quotient avant de passer aux exponentielles pour obtenir l'inéquation équivalente $\left| \frac{x+1}{2x+1} \right| \leq 2$. Le membre de gauche doit donc vérifier simultanément les deux inéquations suivantes :
- $\frac{x+1}{2x+1} \leq 2$, soit $\frac{x+1-2(2x+1)}{2x+1} \leq 0$, donc $\frac{-3x-1}{2x+1} \leq 0$. Un tableau de signe donne comme solutions de cette inéquation les nombres appartenant à $\left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty \right[$ (une autre façon de voir les choses est de dire que le quotient est négatif si et seulement si le produit l'est, et le trinôme obtenu est négatif à l'extérieur de ses racines).
 - $\frac{x+1}{2x+1} \geq -2$, soit $\frac{x+1+2(2x+1)}{2x+1} \geq 0$, donc $\frac{5x+3}{2x+1} \geq 0$. Par le même genre de calcul que ci-dessous, on trouve comme solution $\left] -\infty; -\frac{3}{5} \right] \cup \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{3}{5} \right] \setminus \{-1\} \cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty \right[$.

Exercice 4 (**)

1. La fonction $x \mapsto -2x + 3$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} , et l'exponentielle est strictement croissante, donc la composée $x \mapsto e^{-2x+3}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} . De plus, elle est à valeurs dans $]0; +\infty[$ (une exponentielle est toujours positive), intervalle sur lequel la fonction inverse est décroissante. Conclusion : $x \mapsto \frac{1}{e^{-2x+3}}$ est strictement croissante sur \mathbb{R} . Comme on multiplie ceci par $-\frac{5}{2}$, le sens de variation change encore une fois, et f est finalement décroissante sur \mathbb{R} .
2. Soustraire 3 à la fin ne changera pas le sens de variation, concentrons-nous donc sur le carré. La fonction $x \mapsto e^x + 2$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , à valeurs strictement positives, et la fonction carré est croissante sur \mathbb{R}_+ , donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
3. Cette fois-ci c'est différent, car $e^x - 3$ ne prend pas toujours des valeurs positives. Plus précisément $e^x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \ln 3$. Sur $] -\infty; \ln 3]$, $x \mapsto e^x - 3$ est donc croissante et à valeurs dans $] -\infty; 0]$, intervalle sur lequel la fonction carré est décroissante. La fonction f est donc strictement décroissante sur $] -\infty; \ln 3]$. Sur $[\ln 3; +\infty[$, $x \mapsto e^x - 3$ est croissante et à valeurs positives, et cette fois f sera strictement croissante.
4. Commençons par constater que f n'est pas définie partout : $e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow x < e$. Ensuite, la fonction $x \mapsto -x$ étant strictement décroissante sur $]e; +\infty[$, et les fonctions exponentielle et \ln strictement croissantes sur leurs ensembles de définition, on en déduit facilement que f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$.
5. Notre dernière fonction est définie si $\frac{x+1}{x-1} > 0$, soit $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ (un petit tableau de signe pour le vérifier). Pour obtenir son sens de variations, il peut être utile de faire la petite modification suivante : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$. La fonction $x \mapsto \frac{2}{x-1}$ étant strictement décroissante sur $] -\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, et le logarithme

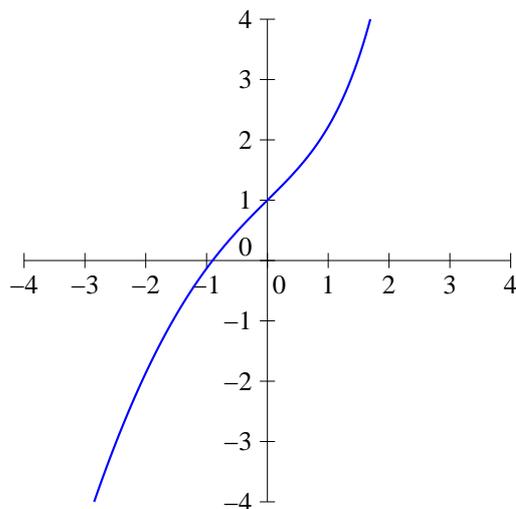
népérien étant strictement croissant sur son ensemble de définition, la fonction f est donc strictement décroissante sur $] - \infty; -1[$, ainsi que sur $]1; +\infty[$.

Exercice 5 (* à ***)

- La fonction f est définie sur \mathbb{R} , de dérivée $f'(x) = e^x - x$ et de dérivée seconde $f''(x) = e^x - 1$. La fonction f'' s'annule en 0, donc on obtient pour f' le tableau de variations suivant :

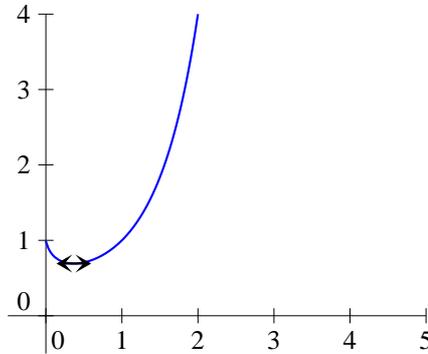
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

(les limites ne posent pas de difficulté de calcul). Comme $1 > 0$, f' est toujours strictement positive, et f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . Les limites de f se calculent elles aussi assez facilement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et en $+\infty$, on peut écrire $f(x) = e^x \left(1 - \frac{x^2}{2e^x}\right)$, où la parenthèse a pour limite 1 par croissance comparée, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Pour tracer à la main une courbe représentative correcte, il faudrait calculer quelques points car on manque cruellement d'informations. On peut toujours constater que $f(0) = 1$. En tout cas, la courbe ressemble à ceci :



- La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$, et on peut l'écrire sous forme exponentielle $f(x) = e^{x \ln x}$. Elle a donc pour dérivée $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x = -1$, c'est-à-dire pour $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$, et f est donc décroissante sur $]0; \frac{1}{e}]$ et croissante sur $[\frac{1}{e}; +\infty[$. On peut calculer les limites de f : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (croissance comparée), donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (pas de problème pour celle-là). Après avoir calculé $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$, on obtient le tableau de variations et la courbe suivants :

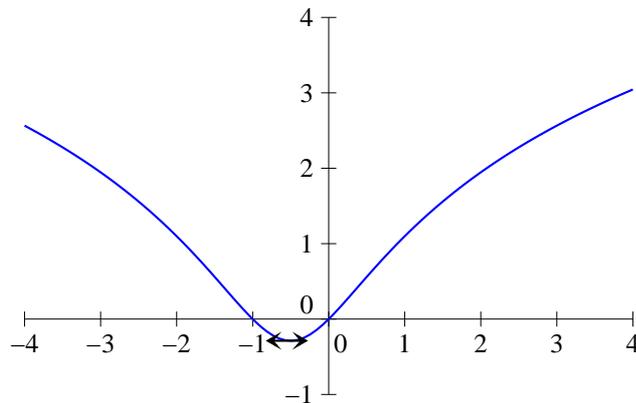
x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f	1	$e^{-\frac{1}{e}}$	$+\infty$



3. Intéressons-nous pour commencer au domaine de définition de f , et cherchons pour cela les racines du trinôme $1 + x + x^2$. Il a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, donc est toujours du signe de 1, à savoir positif. La fonction f est donc définie sur \mathbb{R} . Elle a pour dérivée $f'(x) = \frac{1 + 2x}{(1 + x + x^2)^2}$, qui s'annule pour $x = -\frac{1}{2}$. Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + x + x^2 = +\infty$, on a

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, et de plus $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4$, d'où le tableau et la courbe suivants :

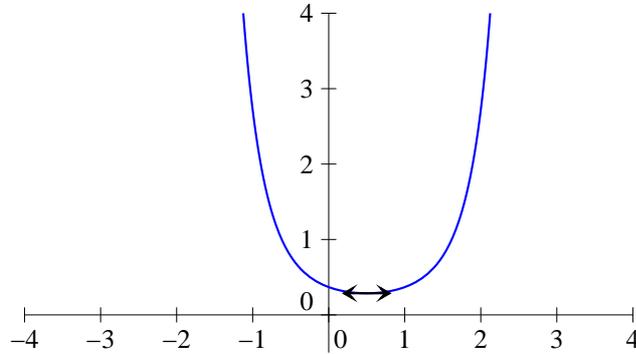
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\ln 3 - \ln 4$	$+\infty$



4. La fonction f est définie sur \mathbb{R} , de dérivée $f'(x) = (2x - 1)e^{x^2 - x - 1}$, qui s'annule pour $x = \frac{1}{2}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - x - 1 = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. De plus $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$



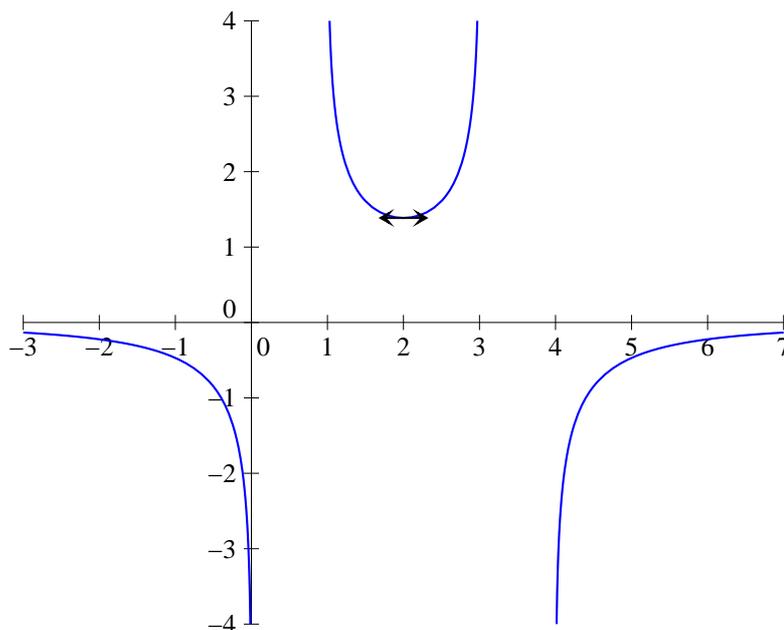
5. Il faut commencer par déterminer le domaine de définition de f , et pour cela faire un joli tableau de signes. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$ (pour le numérateur, la factorisation par x rend les racines évidentes). D'où le tableau :

x		0	1	3	4		
$x^2 - 4x$	+	0	-	-	-	0	+
$x^2 - 4x + 3$	+	+	0	-	0	+	+
$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$	+	0	-	+	-	0	+

On a donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]1; 3[\cup]4; +\infty[$. Sur cet ensemble, f a pour dérivée $f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2-4x+3) - (2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2} \times \frac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \frac{3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} \times \frac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \frac{6(x-2)}{(x^2-4x)(x^2-4x+3)}$. Le dénominateur étant strictement positif sur \mathcal{D}_f (c'est un produit au lieu d'un quotient, mais le tableau de signes est exactement celui qu'on a fait ci-dessus), f' est du signe de $x-2$. Par ailleurs, $f(2) = \ln \frac{-4}{-1} = 2 \ln 2$

Restent quelques limites un peu pénibles à calculer. Les plus faciles sont les limites en 0 et en 4 : quand le numérateur s'annule, le quotient à l'intérieur du ln tend vers 0, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$. En 1 et 3, c'est à peine plus compliqué : le dénominateur s'annule donc le quotient tend vers $+\infty$ (ça ne peut pas être $-\infty$ puisque f ne serait pas définie si le quotient prenait des valeurs négatives), et on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$. Enfin, vos souvenirs sur le calculs de limites de Terminale devraient vous permettre de vérifier que la limite du quotient en $\pm\infty$ vaut 1 (on factorise par x^2 en haut et en bas), d'où $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Ce qui nous donne un tableau et une courbe ressemblant à ceci :

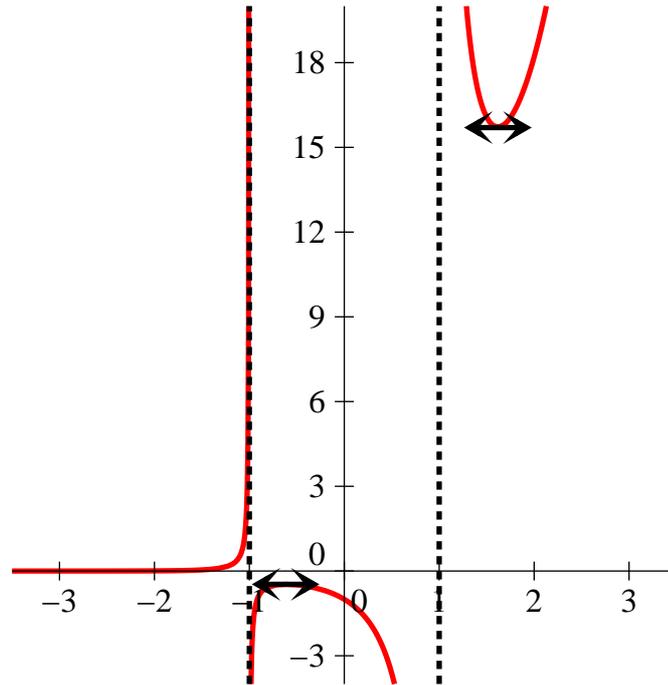
x	$-\infty$	0	1	2	3	4	$+\infty$
f	0	$-\infty$	$+\infty$	$2 \ln 2$	$+\infty$	$-\infty$	0



6. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, de dérivée $f'(x) = \frac{2e^{2x}(x^2 - 1) - 2xe^{2x}}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2 - x - 1)}{(x^2 - x - 1)^2}$. Cette dérivée est du signe de $x^2 - x - 1$, trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$, qui s'annule en deux valeurs $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (qui est compris entre -1 et 1) et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (qui est plus grand que 1). La fonction f admet donc un maximum en x_1 et un minimum en x_2 , dont on ne cherchera exceptionnellement pas à expliciter les valeurs car ça ne se simplifie vraiment pas. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; et sans croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$. Comme par ailleurs e^{2x} est strictement positif, et $x^2 - 1$ est positif en-dehors de ses racines, on trouve $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

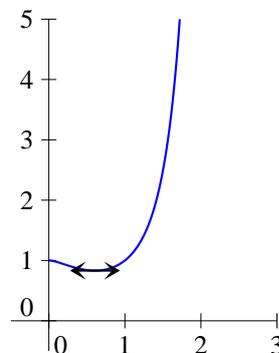
x	$-\infty$	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
f	0	$+\infty$	$f(x_1)$	$-\infty$	$f(x_2)$	$+\infty$

La courbe n'est ici pas très pratique à tracer sur une feuille, le minimum étant à une hauteur assez élevée.



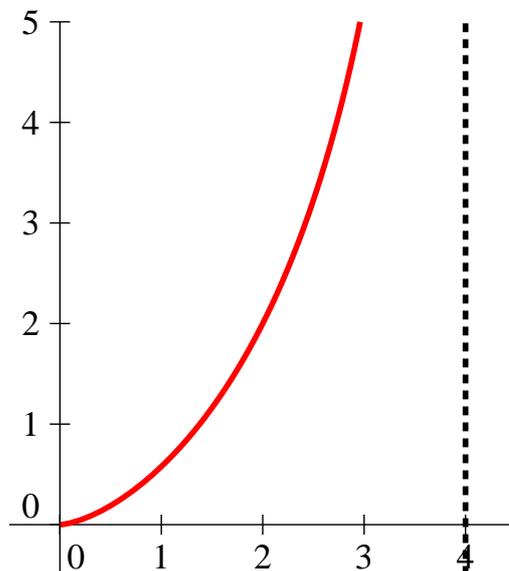
7. Cette fonction est définie sur $]0; +\infty[$, et s'écrit sous forme exponentielle $f(x) = e^{x^2 \ln x}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = (2x \ln x + x)e^{x^2 \ln x} = x(2 \ln x + 1)e^{x^2 \ln x}$. Le facteur x est toujours strictement positif sur \mathcal{D}_f , seul compte donc le signe de $2 \ln x + 1$. Ceci s'annule pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Le calcul des limites est extrêmement similaire à celui de la deuxième fonction de l'exercice, au point d'ailleurs que les limites sont les mêmes, on a $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{1}{2e}}$ et on obtient tableau et courbe :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
f	1	$e^{-\frac{1}{2e}}$	$+\infty$



8. La fonction f est définie si $\frac{x^3}{2a-x} \geq 0$, soit lorsque $x \in [0; 2a[$. La fonction vérifie évidemment $f(0) = 0$, et $\lim_{x \rightarrow 2a} f(x) = +\infty$. La fonction racine carrée étant croissante, f a les mêmes va-

riations que $x \mapsto \frac{x^3}{2a-x}$, qui a pour dérivée $\frac{3x^2(2a-x) + x^3}{(2a-x)^2} = \frac{6ax^2 - 2x^3}{(2a-x)^2} = \frac{2x^2(3a-x)}{(2a-x)^2}$, toujours positive sur $[0; 2a]$. La fonction f est donc strictement croissante, et on n'a pas grand chose de plus à dire sur cette fonction ! Un exemple de courbe lorsque $a = 2$:



Exercice 6 (**)

1. La fonction f est bien sûr définie sur \mathbb{R}^{+*} . De façon évidente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Et comme $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(x) = 0$ (croissance comparée), on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(2)$.
2. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition, et $f'(x) = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}$. Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(x) + 2$, la dérivée s'annule en particulier pour $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$. Après avoir calculé $f(e^{-2}) = \frac{1}{e} \times (-2) + \ln(2) = \ln(2) - \frac{2}{e}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0	e^{-2}	$+\infty$
f	$\ln(2)$	$\ln(2) - \frac{2}{e}$	$+\infty$

3. D'après le tableau de variations, f est bijective de $]0, e^{-2}]$ vers $\left[\ln(2) - \frac{2}{e}; \ln(2)\right]$, et elle l'est aussi de $[e^{-2}, +\infty[$ vers $\left[\ln(2) - \frac{2}{e}, +\infty\right[$. Or, $\ln(2) - \frac{2}{e} \simeq -0.03 < 0$, ce qui prouve l'existence d'une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur chacun des deux intervalles où f est bijective. Il y a donc deux solutions à l'équation.
4. (a) On calcule $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln(2) = -\frac{2\ln(n)}{n} + \ln(2)$. Cette expression s'annule si $2\ln(n) = n\ln(2)$, soit en passant tout à l'exponentielle $n^2 = 2^n$.
 (b) Le nombre 2^n étant pair, n^2 est pair, et n aussi (le carré d'un nombre entier a toujours la même parité que le nombre lui-même). On peut donc poser $n = 2p$ pour trouver la

condition équivalente $(2p)^2 = 2^{2p}$, soit $4p^2 = 2^{2p}$, ou encore $p^2 = 2^{2p-2} = (2^{p-1})^2$, ce qui implique bien $p = 2^{p-1}$ (tous ces nombres sont positifs).

(c) L'égalité précédente est manifestement vérifiée lorsque $p = 1$ (puisque $2^0 = 1$) et lorsque $p = 2$ (puisque $2^1 = 2$), ce qui correspond aux deux solutions suivantes de l'équation $f(x) = 0 : x = \frac{1}{(2 \times 1)^2} = \frac{1}{4}$, et $x = \frac{1}{(2 \times 2)^2} = \frac{1}{16}$. Ce sont évidemment les seules solutions de cette équation, puisqu'on sait qu'elle n'en possède que deux.

5. Il ne reste plus qu'à faire le lien avec l'équation de départ : pour un x nécessairement positif, $x\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ donne, en passant tout au \ln , l'équation équivalente $\sqrt{x} \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, soit $f(x) = 0$. Les solutions de l'équation (E) sont donc les deux réels $x = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{1}{16}$.

Exercice 7 (**)

1. Le dénominateur de f ne s'annulant jamais (puisque $e^x + 1$ est toujours strictement positif), $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Comme $f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = f(x)$, la fonction f est paire.

3. Quand x tend vers $-\infty$, le numérateur de f tend vers 0 et son dénominateur vers 1, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. La fonction étant paire, on aura aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (ce qu'on peut retrouver par un calcul direct, par exemple en développant le dénominateur et en factorisant tout par e^x).

4. Calculons donc : $f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, le signe du numérateur dépend uniquement de celui de $1 - e^x$, qui est positif quand $e^x \leq 1$, c'est-à-dire quand $x \leq 0$. D'où le tableau de variations suivant ($f(0) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$) :

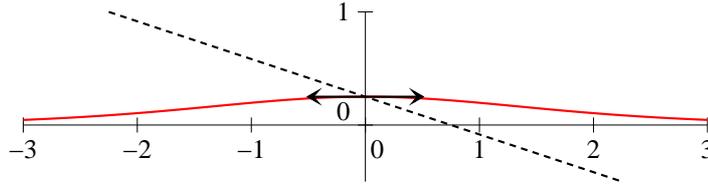
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$\frac{1}{4}$	0

5. Puisque $e^{\ln 2} = 2$, on a $f(\ln 2) = \frac{2}{(1+2)^2} = \frac{2}{9}$, et $f'(\ln 2) = \frac{2(1-2)}{(1+2)^3} = -\frac{2}{27}$. L'équation de la tangente est donc $y = -\frac{2}{27}(x - \ln 2) + \frac{2}{9} = -\frac{2}{27}x + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{\ln 2}{3}\right)$.

6. Le fait que $f'(x)$ soit négatif sur cet intervalle a déjà été vu. De plus, $f'(x) + \frac{1}{3} = \frac{3e^x(1-e^x) + (1+e^x)^3}{(1+e^x)^3} = \frac{3e^x - 3e^{2x} + 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}}{(1+e^x)^3} = \frac{1 + 6e^x + e^{3x}}{(1+e^x)^3} \geq 0$, d'où la deuxième inégalité demandée.

7. Posons $a(x) = f(x) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$. Comme $a'(x) = f'(x) + \frac{1}{3} \geq 0$, la fonction a est croissante sur $[0; +\infty[$. Or, $a(0) = f(0) - \frac{1}{4} = 0$, donc la fonction a prend des valeurs positives sur $[0; +\infty[$, ce qui revient à ce qu'on voulait prouver.

8. Voici les courbes, avec la droite en pointillés :



Exercice 8 (**)

1. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ étant paire, f_n est de même parité que $x \mapsto x^n$, elle est donc paire si n est pair, et impaire si n est impair.
2. Le domaine de définition de f_n est \mathbb{R} tout entier. En exploitant la parité, on peut se contenter de calculer la limite de f_n en $+\infty$. En écrivant par exemple $f_n(x) = (x^2)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2}$, puis en posant $X = x^2$, on se ramène à un cas tout à fait classique de croissance comparée : $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^{\frac{n}{2}} = +\infty$, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Que la fonction soit paire ou impaire ne change rien, la limite en $-\infty$ sera également nulle. La seule asymptote à la courbe \mathcal{C}_n est donc l'axe des abscisses, asymptote horizontale valable en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Les fonctions f_n sont dérivables sur \mathbb{R} , et comme $f_1(x) = xe^{-x^2}$, on calcule $f_1'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2x^2$, et s'annule en particulier lorsque $x^2 = \frac{1}{2}$, soit $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On calcule $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}e}$. On peut alors dresser le tableau suivant (en utilisant le fait que f_1 est impaire) :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f_1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}e}$	$\frac{1}{\sqrt{2}e}$	0

Passons désormais à $f_2(x) = x^2e^{-x^2}$. On calcule cette fois $f_2'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}$, dérivée qui s'annule en 0 et en ± 1 . On calcule $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, puis on dresse le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f_2	0	$\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	0

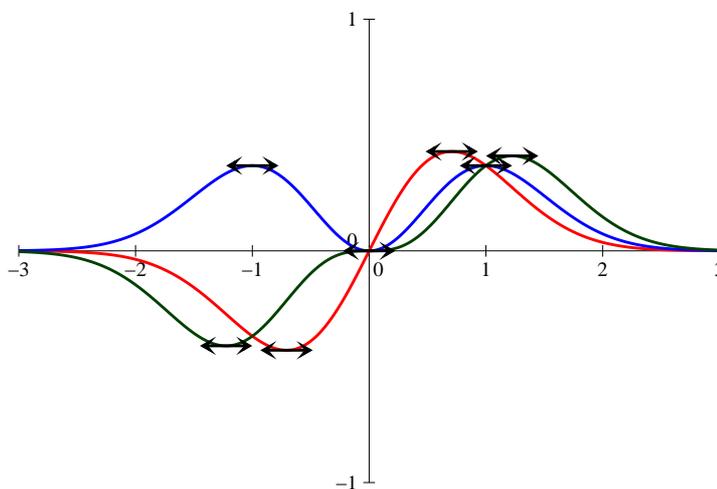
4. Ce n'est pas vraiment plus dur : $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}e^{-x^2} = x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$. La dérivée s'annule toujours en 0 (sauf quand $n = 1$, comme on a vu plus haut) sans changer de signe quand n est impair, et pour $x = \pm \sqrt{\frac{n}{2}}$. On calcule $f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$. On obtient alors le tableau suivant si n est impair :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{n}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
f_1	0	$-\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	0	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	0

Et si n est pair :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{n}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
f_1		$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$		$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	
	0		0		0

- Même pas besoin de mettre y_n sous forme exponentielle pour se rendre compte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$. Il n'y a donc pas de majorant commun à toutes les fonctions.
- Calculons $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^n e^{-x^2} - x^{n+1} e^{-x^2} = x^n (1-x) e^{-x^2}$. La courbe \mathcal{C}_n est donc au-dessus de \mathcal{C}_{n+1} sur l'intervalle $[0, 1]$, et en-dessous sur $[1, +\infty[$. Toutes les courbes se coupent au point de coordonnées $\left(1, \frac{1}{e}\right)$. Sur \mathbb{R}^- , \mathcal{C}_n est toujours en-dessous si n est impair, et toujours au-dessus si n est pair, ce qui est évident vu le signe des deux fonctions correspondantes. Faisons de même pour $f_n(x) - f_{n+2}(x) = x^n (1-x^2) e^{-x^2}$. Si n est pair, \mathcal{C}_n est au-dessus de \mathcal{C}_{n+2} sur $[-1, 1]$, en-dessous le reste du temps. Si n est impair, elle est au-dessus sur $[0, 1]$ et sur $]-\infty, -1]$ et en-dessous le reste du temps.
- Calculons donc $f_1''(x) = -4xe^{-x^2} - 2x(1-2x^2)e^{-x^2} = (4x^3 - 6x)e^{-x^2} = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$. Cette dérivée seconde s'annule trois fois, pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. On pose donc $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$, et on calcule $f_1(a) = \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2}}$, ainsi que $f_1'(a) = (1-3)e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{e\sqrt{e}}$. Ce qui donne comme équation pour la tangente $y = -\frac{2}{e\sqrt{e}} \left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}} = \frac{-2\sqrt{2}x + 3\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}}$.
- Voici les allures : \mathcal{C}_1 en rouge, \mathcal{C}_2 en bleu, \mathcal{C}_3 en vert :

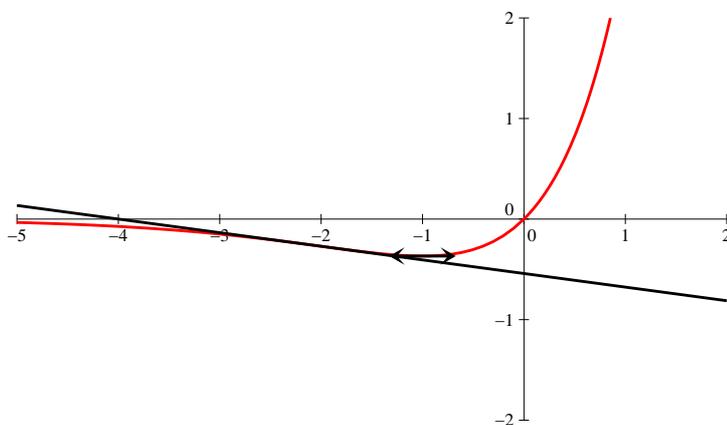


Problème 1 (***)

I. Étude de f et de sa réciproque.

- La fonction f a pour dérivée $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. La fonction admet donc un minimum en -1 , de valeur $f(-1) = -\frac{1}{e}$. Sans difficulté, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et en appliquant directement un résultat de croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2. (a) La fonction f' est dérivable, de dérivée $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Elle s'annule effectivement une seule fois, en $\alpha = -2$.
- (b) Puisque $f(-2) = -\frac{2}{e^2}$ et $f'(-2) = -\frac{1}{e^2}$, la tangente a pour équation $y = -\frac{1}{e^2}(x+2) - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x+4)$. Elle coupe l'axe des abscisses pour $x = -4$.
- (c) On cherche donc à étudier le signe de $f(x) + \frac{1}{e^2}(x+4) = xe^x + \frac{1}{e^2}(x+4)$. Cette expression a la même dérivée seconde que f , sa dérivée $(x+1)e^x + \frac{1}{e^2}$ est donc décroissante sur $] -\infty; -2]$ et croissante sur $[-2; +\infty[$. Comme elle vaut $-\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2} = 0$ en -2 , elle est donc toujours positive. L'expression $f(x) + \frac{1}{e^2}(x+4)$ est croissante sur \mathbb{R} , elle s'annule également en $x = -2$ (puisque la tangente y coupe la courbe représentative de f), on en déduit que la tangente est au-dessus de la courbe sur $] -\infty; -2]$, et en-dessous sur $[-2; +\infty[$.
3. Voici une allure de courbe :



4. La fonction f étant continue et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$, elle y est bijective vers son intervalle image $\left[-\frac{1}{e}; +\infty\right[$. Le théorème de la bijection donne directement le tableau de variations de g :

x	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$
f		$+\infty$
	-1	

5. En utilisant la formule de dérivation d'une réciproque, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}}$. Or, par définition, la fonction g vérifie $g(x)e^{g(x)} = x$. On peut donc écrire, lorsque $x \neq 0$, $e^{g(x)} = \frac{x}{g(x)}$, et $g'(x) = \frac{g(x)}{x(g(x)+1)}$. En particulier, la fonction g est solution de l'équation différentielle $xy'(y+1) = y$.
6. En effet, cette équation s'écrit $e^{x \ln(2)} = x$, soit en multipliant chaque membre par $\ln(2)$, $\frac{x \ln(2)}{e^{x \ln(2)}} = \ln(2)$, donc $-x \ln(2)e^{-x \ln(2)} = -\ln(2)$. Autrement dit $f(-x \ln(2)) = -\ln(2)$, ce qui équivaut à $-x \ln(2) = g(-\ln(2))$, soit $x = -\frac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$.

7. On peut écrire l'équation sous la forme $e^{x \ln(x)} = 3$, soit $x \ln(x) = \ln(3)$. En posant $X = \ln(x)$, on se ramène à l'équation $f(X) = \ln(3)$, soit $X = g(\ln(3))$. On a donc $\ln(X) = e^{g(\ln(3))}$, soit $x = e^{g(\ln(3))}$.

II. Des fonctions auxiliaires.

- La fonction h_a est évidemment dérivable, de dérivée $h'_a(x) = -e^{-x} + 2ax = e^{-x}(-1 + 2af(x))$, qui est du signe de $2af(x) - 1$. Elle s'annule lorsque $f(x) = \frac{1}{2a}$ (valeur atteinte une unique fois par la fonction f), autrement dit en $m_a = g\left(\frac{1}{2a}\right)$. Son image par la fonction h est $h_a(m_a) = e^{-g\left(\frac{1}{2a}\right)} + a\left(g\left(\frac{1}{2a}\right)\right)^2 = e^{-m_a} + am_a^2$. Or, par définition, $m_a = g\left(\frac{1}{2a}\right)$ implique $f(m_a) = \frac{1}{2a}$, soit $m_a e^{m_a} = \frac{1}{2a}$, donc $e^{-m_a} = 2am_a$, et $h_a(m_a) = 2am_a + am_a^2 = am_a(m_a + 2)$.
- Puisque $i(a) = g\left(\frac{1}{2a}\right)$, que $a \mapsto \frac{1}{2a}$ est décroissante sur \mathbb{R}^{+*} , et que g est croissante sur son domaine de définition, i est une fonction décroissante. Par simple composition de limite, $\lim_{a \rightarrow +\infty} i(a) = g(0) = 0$, et $\lim_{a \rightarrow 0^+} i(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- Il suffit de constater que, si $a < b$, on aura $h_a(x) < h_b(x)$ sur \mathbb{R} . En particulier, $h_a(m_b) < h_b(m_b)$. Comme m_a est le minimum de la fonction h_a , on a également $h_a(m_a) \leq h_a(m_b)$, dont on déduit que $h_a(m_a) < h_b(m_b)$. La valeur du maximum est donc une fonction strictement croissante de la variable a . Reste à déterminer la limite quand a tend vers $+\infty$ de $am_a(m_a + 2)$. On sait déjà que $\lim_{a \rightarrow +\infty} m_a = 0$, donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} m_a + 2 = 2$. De plus, $am_a = \frac{1}{2}e^{-m_a}$, qui a pour limite $\frac{1}{2}$, donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} h_a(m_a) = 1$.

Problème 2 : Un peu de géométrie! (**)

I. Une inégalité classique.

- Posons donc $f(x) = x(1-x)^2 = x - 2x^2 + x^3$, et étudions les variations de f sur l'intervalle $[0, 1]$: la fonction est évidemment dérivable, et $f'(x) = 1 - 4x + 3x^2$, dérivée ayant pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et s'annulant en $x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$ et en $x_2 = \frac{4+2}{6} = 1$. Elle est positive sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, et croissante sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. La fonction atteint donc comme maximum sur l'intervalle $[0, 1]$ la valeur $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$. On a exactement prouvé ce qui était demandé.
- (a) On va bien entendu passer par un calcul de dérivée : $f'_a(x) = -2ax + a(1-a)$. Elle s'annule en $x = \frac{a(1-a)}{2a} = \frac{1-a}{2}$, qui appartient bien sûr à l'intervalle $[0, 1-a]$. La dérivée étant positive avant cette valeur et négative après, la fonction f_a admet pour maximum la valeur $f\left(\frac{1-a}{2}\right) = -a\frac{(1-a)^2}{4} + a(1-a)\frac{1-a}{2} = \frac{a(1-a)^2}{2}$.
- (b) Commençons par fixer la valeur de a , le réel b varie alors entre 0 et $1-a$ (les trois réels étant positifs et de somme 1), et $c = 1-a-b$, donc $abc = ab(1-a-b) = -ab^2 + a(1-a)b$. La question précédente nous assure que cette valeur est maximale si $b = \frac{1-a}{2}$, ce qui revient à dire que $c = b$. Cherchons désormais la valeur de a pour laquelle abc est maximale en imposant $c = b = \frac{1-a}{2}$. On a alors $abc = \frac{a(1-a)^2}{4}$, qui est majoré d'après la première

question par $\frac{1}{27}$ (il suffit de tout diviser par 4). Cela prouve que, dans les conditions données, $abc \leq \frac{1}{27}$.

(c) Pour maximiser abc , il faut avoir d'une part $c = b = \frac{1-a}{2}$, puis $a = \frac{1}{3}$ (question 1), ce qui impose $a = b = c = \frac{1}{3}$.

3. Posons $a = \frac{x}{x+y+z}$, $b = \frac{y}{x+y+z}$ et $c = \frac{z}{x+y+z}$. Ces trois réels a , b et c sont positifs et vérifient $a + b + c = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$. En appliquant les résultats précédents, $abc \leq \frac{1}{27}$. En

multipliant trois fois par $x + y + z$, on trouve exactement $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$. Un seul cas extrêmement particulier : si $x = y = z = 0$, on ne peut pas diviser par $x + y + z$, mais dans ce cas, l'inégalité demandée est triviale!

4. C'est une égalité si $a = b = c$, ce qui revient exactement à dire que $x = y = z$.

II. Applications aux triangles.

1. Dans un triangle, la somme des longueurs de deux côtés est toujours plus grande que le troisième côté. Ici, par exemple, $a \leq b + c$, donc $2a \leq a + b + c = 2p$, ce qui implique $2p - 2a \geq 0$ et donc $x \geq 0$. C'est exactement similaire pour les deux autres côtés.

2. Le périmètre p étant fixé, \mathcal{A} est maximale quand $(p-a)(p-b)(p-c)$ est maximale d'après la formule de Héron, donc quand xyz est maximal. Le maximum de xyz est égal à $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$.

Or, $x + y + z = 3p - a - b - c = 3p - 2p = p$, donc le maximum de xyz vaut $\frac{p^3}{27}$, et celui de

\mathcal{A} est égal à $\sqrt{p \times \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{\sqrt{27}}$.

3. Puisqu'on doit avoir $x = y = z$, cela revient à dire que $a = b = c$. Autrement dit, le triangle est alors équilatéral.

Problème 3 (***)

I. Étude de la fonction th.

1. La fonction ch étant toujours strictement positive, th est bien définie sur \mathbb{R} . De plus, $\text{th}(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x} + 1)}{e^{-x}(e^{2x} - 1)} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$. Enfin, la fonction th est impaire en tant que quotient d'une fonction impaire par une fonction paire.

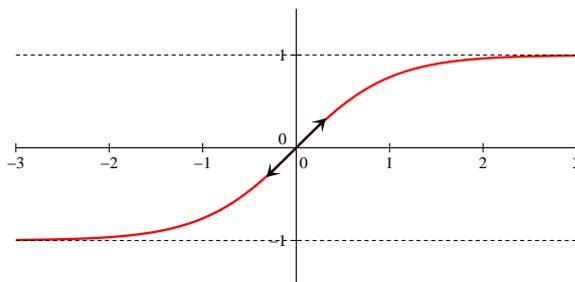
2. Calculons, par exemple à l'aide de la deuxième forme donnée à la question précédente : $\text{th}'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^x(e^x + e^{-x}))^2} = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$. Comme par ailleurs $1 - \text{th}^2(x) = 1 - \frac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$, les deux formules sont bien équivalentes. La fonction th a donc une dérivée strictement positive, elle est strictement croissante sur \mathbb{R} . Sous sa deuxième forme, le calcul de limite en $-\infty$ est immédiat :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = \frac{-1}{1} = -1$. Par imparité de la fonction th , on en déduit que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$. La fonction th est donc bijective (en tant que fonction continue strictement monotone) de \mathbb{R} vers $] -1, 1[$. On peut dresser si on le souhaite le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
th	-1	0	1

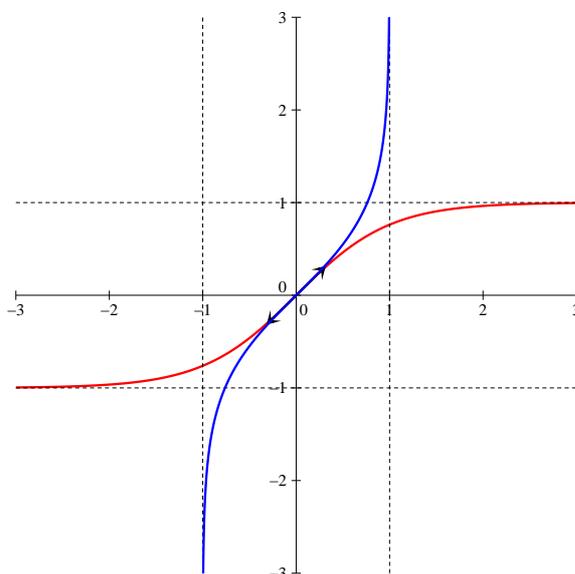
3. Puisque $\text{th}(0) = 0$ et $\text{th}'(0) = 1 - \text{th}^2(0) = 1$, la tangente à l'origine a pour équation $y = x$. Une allure de la courbe :



4. Un calcul immédiat donne $\text{sh}(x) + \text{ch}(x) = e^x$ et $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$. Les deux formules à démontrer se résument alors aux égalités $e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^{-x-y} = e^{-x} e^{-y}$, qui découlent des propriétés bien connues de la fonction exponentielle.
5. En développant tout brutalement, $\text{sh}(x+y) + \text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)$, et $\text{ch}(x+y) - \text{sh}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) - \text{ch}(x)\text{sh}(y) - \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)$. En faisant la somme des deux équations et en divisant par 2, on obtient alors $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)$. En faisant la différence et en divisant par 2, on a cette fois $\text{sh}(x+y) = \text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{sh}(x)\text{ch}(y)$.
6. On peut faire le même calcul que pour la formule d'addition des tangentes : on divise les deux formules, puis on divise tout en haut et en bas par $\text{ch}(x)\text{ch}(y)$, ce qui donne $\text{th}(x+y) = \frac{\text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y)}{\text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)} = \frac{\text{th}(y) + \text{th}(x)}{1 + \text{th}(x)\text{th}(y)}$.

II. Réciproque de la fonction th.

1. Pas besoin de calcul en effet, la réciproque est continue, strictement croissante, avec deux asymptotes verticales en -1 et en 1 . Allez, les deux courbes ensemble :



2. On peut écrire $\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(x))}$. Or, $\operatorname{th}(\operatorname{argth}(x)) = x$ quel que soit le réel x , donc $\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$.
3. Puisque $y = \operatorname{argth}(x)$, on peut écrire $x = \operatorname{th}(y) = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1}$, soit $xe^{2y} - x = e^{2y} + 1$. En regroupant différemment, on trouve bien $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$. Autrement dit, $y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (pas de problème, tout est positif si $x \in]-1, 1[$). Cette expression est plus facile à dériver directement. Posons $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$, alors $g'(x) = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$, donc $\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}$. Ouf, on retrouve la bonne formule.
4. (a) La fonction f est définie à condition d'avoir $0 \leq \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{\operatorname{ch}(x) + 1} < 1$ (le quotient doit être positif à cause de la racine carrée, et la racine carrée doit ensuite être strictement inférieure à 1 pour que la composition par argth soit possible, donc le quotient lui-même doit être strictement inférieur à 1). Comme on sait que ch est minorée par 1, on a toujours $0 \leq \operatorname{ch}(x) - 1 < \operatorname{ch}(x) + 1$, donc la fonction f est toujours définie. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- (b) En reprenant les résultats précédents, $f(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{1 - \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y+1 + y-1 + 2\sqrt{(y-1)(y+1)}}{(y+1) - (y-1)}\right) = \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.
- (c) En remplaçant y par $\operatorname{ch}(x)$, on trouve donc $f(x) = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{ch}(x) + \sqrt{\operatorname{ch}^2(x) - 1})$. Or $\sqrt{\operatorname{ch}^2(x) - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2(x)} = |\operatorname{sh}(x)| = \operatorname{sh}(|x|)$ (car la fonction sh est impaire). Comme la fonction ch , quant à elle, est paire, $\operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(|x|)$, et $f(x) = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{ch}(|x|) + \operatorname{sh}(|x|)) = \frac{1}{2} \ln(e^{|x|}) = \frac{|x|}{2}$.

III. Une équation fonctionnelle.

1. Les constantes solutions sont les réels k vérifiant $k = \frac{2k}{1+k^2}$, soit $k(1+k^2) = 2k$. Soit $k = 0$, soit $1+k^2 = 2$, donc $k = \pm 1$. Il y a donc trois fonctions constantes solutions.
2. Puisque vous n'êtes pas censés connaître de formules de trigonométrie hyperbolique compliquées, faisons un calcul brutal : $\frac{2 \operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}(x)^2} = \frac{\frac{2e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}} = \frac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2} = \frac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{2e^{2x} + 2e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \operatorname{th}(2x)$.
3. En remplaçant x par 0, on trouve $f(0) = \frac{2f(0)}{1 + f(0)^2}$, ce qui est exactement l'équation résolue à la première question. On a donc $f(0) = 0$, $f(0) = -1$ ou $f(0) = 1$.
4. On ose ? C'est complètement trivial ! En effet, en supposant f solution, $-f(2x) = \frac{-2f(x)}{1 + (-f(x))^2}$, donc $-f$ est aussi solution, et $f(2kx) = \frac{2f(kx)}{1 + f(kx)^2}$ en remplaçant simplement x par kx dans l'équation (ça doit être vrai pour tout réel, donc ça ne pose pas le moindre problème).
5. On peut toujours écrire $f(x) = \frac{2f(\frac{x}{2})}{1 + f(\frac{x}{2})^2}$. Si on prouve que $\frac{2t}{1+t^2}$ est toujours compris entre -1 et 1 quelle que soit la valeur du réel t , la fonction f sera donc bornée par -1 et 1 . On peut

effectuer une étude de fonction pour obtenir l'encadrement, ou être astucieux : $(t + 1)^2 \geq 0$ implique $2t \geq -t^2 - 1$, soit en divisant par $t^2 + 1$ (qui est positif), $\frac{2t}{t^2 + 1} \geq -1$. De même, comme $(t - 1)^2 \geq 0$, on peut dire que $2t \leq 1 + t^2$, et en divisant à nouveau par $t^2 + 1$, on trouve cette fois-ci $\frac{2t}{t^2 + 1} \leq 1$. On a bien prouvé que $\frac{2t}{t^2 + 1} \in [-1; 1]$, soit en posant $t = f\left(\frac{x}{2}\right)$, $f(x) \in [-1; 1]$.