Feuilles d'exercices n°2 : Fonctions usuelles

PTSI B Lycée Eiffel

15 septembre 2017

Vrai/Faux

On doit être capable de répondre correctement et sans hésiter à toutes ces questions, même un an après avoir suivi le cours correspondant.

1. La partie entière d'un nombre x négatif est toujours supérieure à x.
2. La dérivée d'une fonction réciproque est donnée par la formule $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$.
3. Toutes les fonctions exponentielles sont strictement croissantes.
4. La fonction $\log_a$ a pour réciproque la fonction $x \mapsto a^x$.
5. La fonction ch est une fonction paire.

Exercice 1 (*)

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$
2. $f(x) = e^x \ln(x+5)$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2 - 4}$
4. $f(x) = \ln(x^5 + 1)$

Exercice 2 (* à **)

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6$
2. $f(x) = \ln|x|$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 2x)^2} \times \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}}$
4. $f(x) = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)|$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 3 (** à ***)

Résoudre les équations, inéquations et systèmes suivants :

1. $x^4 + x^2 - 20 = 0$
2. $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

3. $\ln(x+2) - \ln(2x-6) \leqslant \ln 2$
4. $\dfrac{-x^3 - 2x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geqslant -1$
5. $x - 1 \leqslant \sqrt{x+2}$
6. $\ln(x+3) + \ln(x-1) = 2\ln 2$
7. $3 \times 2^{3x-4} \geqslant 2^4$
8. $x + 3\sqrt{1-x} \leqslant 3$
9. $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5$
10. $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$
11. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
12. $x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3 = 0$
13. $e^{-6x} + 3e^{-4x} - e^{-2x} - 3 = 0$
14. $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} \leqslant 4$
15. $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 520 \\ \log x & + & \log y & = & 4 \end{array} \right.$
16. $4\,\mathrm{ch}(x) + 3\,\mathrm{sh}(x) - 4 = 0$
17. $\ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) \leqslant \ln(2)$

Exercice 4 (**)

Déterminer **sans calculer leur dérivée** les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{-5}{2e^{-2x+3}}$
2. $f(x) = (e^x + 2)^2 - 3$
3. $f(x) = (e^x - 3)^2 + 2$
4. $f(x) = \ln(e^{-x} - 1)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Exercice 5 (* à ***)

Étudier les variations et tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$
2. $f(x) = x^x$
3. $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$
4. $f(x) = e^{x^2 - x - 1}$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}\right)$
6. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$
7. $f(x) = x^{x^2}$
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{2a - x}}$, a étant une constante positive fixée.

Exercice 6 (**)

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $(E) : x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

1. On pose $f(x) = \sqrt{x}\ln(x) + \ln(2)$. Donner le domaine de définition de f, et préciser ses limites aux bornes de ce domaine.
2. Étudier les variations de la fonction f, et dresser un tableau de variations complet de la fonction.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (on rappelle que $\ln(2) \simeq 0.69$, et $\frac{1}{e} \simeq 0.36$).
4. On va chercher les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = \frac{1}{n^2}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow n^2 = 2^n$.
   (b) En déduire que n doit être pair puis, en posant $n = 2p$, que $2^{p-1} = p$.
   (c) Trouver deux solutions évidentes à cette dernière équation, et en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
5. Conclure en donnant toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 7 (**)

Dans tout cet exercice, on cherche à étudier la fonction f définie par l'équation $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$, et dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse $\ln 2$.
6. Démontrer que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\frac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.
7. Montrer à l'aide de la question précédente que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leqslant f(x)$.
8. Tracer dans un même repère la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$, et la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 8 (**)

On définit pour tout entier naturel n la fonction f_n par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

1. Étudier la parité de la fonction f_n (on pourra distinguer deux cas).
2. Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition, ainsi que les éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}_n$.
3. Calculer la dérivée f_1' de la fonction f_1, puis étudier ses variations. Faire également le tableau de variations de la fonction f_2.
4. Généraliser l'étude des variations à f_n (toujours en distinguant deux cas).

5. En notant y_n le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_n, déterminer la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$. Existe-t-il un majorant commun à toutes les fonctions f_n ?
6. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$, puis celle de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathcal{C}_{n+2}$.
7. Calculer la dérivée seconde f_1'' de la fonction f_1, et déterminer les réels pour lesquels $f_1''(x) = 0$. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_1$ en son point d'abscisse a, où a est le seul réel strictement positif vérifiant $f_1''(x) = 0$.
8. Tracer une allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ dans un même repère.

Problème 1 (***)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. Étudier les variations et limites de la fonction f.
2. (a) Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f et vérifier qu'elle s'annule en une unique valeur α.
   (b) Donner l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α. En quel point (T) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
   (c) Étudier la position relative de (T) et de $\mathcal{C}_f$ (on pourra dériver deux fois la différence des deux équations si besoin).
3. Tracer dans un même repère (T) et $\mathcal{C}_f$.
4. Montrer que la fonction f est bijective de $[-1; +\infty[$ vers un intervalle à préciser. On note g la réciproque de la fonction f sur cet intervalle. Donner le tableau de variations complet de la fonction g.
5. Exprimer la dérivée g' de la fonction g en fonction de x et de $g(x)$, sans utiliser d'exponentielle. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction g.
6. Montrer que l'équation $2^x = x$ admet pour solution $x = -\dfrac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$ (qu'on ne cherchera bien sûr pas à expliciter plus).
7. Exprimer de même une solution de l'équation $x^x = 3$ en faisant intervenir la valeur $g(\ln(3))$.

II. Des fonctions auxiliaires.

On considère désormais, pour tout réel $a > 0$, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = e^{-x} + ax^2$.

1. Établir le tableau de variations de la fonction h_a (en exploitant les résultats de la première partie). On montrera en particulier que h_a admet un minimum en un point m_a que l'on exprimera en fonction de a et à l'aide de la fonction g. Montrer que $h_a(m_a) = am_a(m_a + 2)$.
2. On note enfin i la fonction $i : a \mapsto m_a$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de la fonction i ainsi que ses limites.
3. Montrer que la valeur du maximum de h_a est une fonction croissante du paramètre a, et déterminer sa limite lorsque a tend vers $+\infty$.

Problème 2 : Un peu de géométrie ! (**)

Le but de ce problème est de déterminer la forme des triangles ayant une aire maximale à périmètre fixé.

I. Une inégalité classique.

1. Démontrer à l'aide d'une étude de fonction que, $\forall a \in [0,1]$, $a(1-a)^2 \leqslant \dfrac{4}{27}$.
2. On fixe désormais une valeur de $a \in [0,1]$, et on pose $f_a(x) = -ax^2 + a(1-a)x$.
   (a) Déterminer le maximum de la fonction f_a sur l'intervalle $[0, 1-a]$.
   (b) En déduire la propriété suivante : si a, b et c sont trois réels positifs tels que $a+b+c=1$, alors $abc \leqslant \dfrac{1}{27}$.
   (c) Dans quels cas l'inégalité démontrée à la question précédente est-elle une égalité ?
3. En utilisant la propriété démontrée à la question 2.b, prouver que, quels que soient les réels positifs x, y et z, on a $xyz \leqslant \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$.
4. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $x = y = z$.

II. Applications aux triangles.

Soit $p > 0$. On considère un triangle de côtés a, b et c tels que $a+b+c = 2p$ (autrement dit, p est le demi-périmètre du triangle), et on admet que l'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle peut être obtenue par la formule de Héron : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

1. On note $x = p-a$, $y = p-b$ et $z = p-c$, justifier que ces trois nombres sont positifs.
2. En appliquant les résultats de la première partie, déterminer la valeur maximale de $\mathcal{A}$ (en fonction de p).
3. À quoi ressemble le triangle dans le cas où l'aire est maximale ?

Problème 3 (***)

Nous allons dans ce problème définir et tenter d'étudier les propriétés élémentaires d'une nouvelle fonction : la fonction **tangente hyperbolique** ou th définie par : $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

I. Étude de la fonction th.

1. Montrer que th est définie sur $\mathbb{R}$ et que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Déterminer la parité de th.
2. Calculer la dérivée de la fonction th et vérifier que $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$. En déduire le tableau de variations de th et prouver qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à préciser.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction th en son point d'abscisse 0, puis donner une allure de la courbe.
4. Simplifier, pour un réel x quelconque, l'expression de $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$ ainsi que celle de $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$. En déduire que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{sh}(x+y) = (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y))$ et $\mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{sh}(x+y) = (\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(y))$.
5. À l'aide des résultats de la question précédente, exprimer $\mathrm{sh}(x+y)$ et $\mathrm{ch}(x+y)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(y)$ et $\mathrm{sh}(y)$.
6. Démontrer que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$.

II. Réciproque de la fonction th.

On note argth la fonction réciproque de la fonction th, définie sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Donner sans aucun calcul une allure de la courbe de la fonction argth, si possible dans le même repère que celle de la question $I.3$.
2. À l'aide de la formule de dérivation d'une réciproque, calculer la dérivée de la fonction argth.
3. Soit $x \in I$ et $y = \text{argth}(x)$. Montrer que $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$, et en déduire une expression de argth à l'aide de la fonction ln. Vérifier avec cette nouvelle expression que votre dérivée de argth est correcte.
4. On considère désormais la fonction f définie par $f(x) = \text{argth}(\sqrt{\dfrac{\text{ch}(x)-1}{\text{ch}(x)+1}})$.
   (a) Déterminer la domaine de définition de f.
   (b) En posant $y = \text{ch}(x)$, montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(y + \sqrt{y^2-1})$.
   (c) En déduire que $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$.

Une équation fonctionnelle (pour aller beaucoup plus loin).

On cherche maintenant toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème.
2. Montrer que la fonction th est une solution du problème.
3. Soit f une solution, quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
4. Vérifier que, si f est solution, $-f$ également, et $g : x \mapsto f(kx)$ également (quelle que soit la valeur de $k \in \mathbb{R}$).
5. Montrer que toutes les valeurs prises par la fonction f sont comprises entre -1 et 1.