Feuille d'exercices n°5 : correction

PTSI B Lycée Eiffel

12 novembre 2017

Vrai-Faux

1. Vrai, dès qu'une fonction est continue, elle y admet des primitives, et dérivable implique continue.
2. Faux, l'équation n'est pas normalisée ! Et pour $x = 0$, l'équation implique $y(0) = \cos(0) = 1$.
3. Faux, il manque le signe $-$ dans l'exponentielle.
4. Vrai.
5. Faux, il manque un x dans la parenthèse.

Exercice 1 (* à **)

Pour simplifier la présentation des calculs, on présentera en général les calculs de primitives sous la forme d'intégrales sans bornes. Les calculs seront faits lignes par ligne :

- Ici, mieux vaut directement donner $F(x) = \dfrac{1}{4(1-2x)^2}$, primitive valable sur chacun des deux intervalles de définition de f, à savoir $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
- $F(x) = \displaystyle\int \cos(t)\sin(t)\ dt = \frac{1}{2}\sin^2(x)$.
- On fait une intégration par parties en posant $u(t) = \arctan(t)$ et $v'(t) = 1$, donc $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = t$, donne $F(x) = \displaystyle\int \arctan(t)\ dt = x\arctan(x) - \int \frac{t}{1+t^2}\ dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\ dt = \int \frac{2}{e^t + e^{-t}}\ dt = \int \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\ dt$. Effectuons le changement de variable $u = e^t$ (donc $t = \ln(u)$), ce qui donne $du = e^t dt$, et transforme notre intégrale en $F(x) = \displaystyle\int \frac{2}{u^2+1}\ du = 2\arctan(e^x)$. Les plus curieux constateront que d'autres changements de variables sont possibles, qui donnent de façon intéressante d'autres expressions de nos primitives. Par exemple, en posant directement $u = \mathrm{sh}(t)$ dans l'intégrale initiale, $du = \mathrm{ch}(t)dt$, et $F(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}\ dt = \int \frac{1}{1+u^2}\ du$ puisque $\mathrm{ch}^2(t) = 1 + \mathrm{sh}^2(t)$. On trouve alors $F(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x))$, qui est toujours égal à $2\arctan(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$ (avouez que ça n'a rien d'évident).
- $F(x) = \displaystyle\int t\sin(t)\sin^2(t)\ dt = \int t\sin(t)(1-\cos^2(t))\ dt = \int t\sin(t)\ dt - \int t\sin(t)\cos^2(t)\ dt$. Coupons l'intégrale en deux pour alléger un peu la rédaction : $F_1(x) = \displaystyle\int t\sin(t)\ dt = -x\cos(x) + \int \cos(t)\ dt = -x\cos(x) + \sin(x)$ par intégration par parties. Passons au deuxième

morceau, où on va aussi pouvoir faire une IPP en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = -\sin(t)\cos^2(t)$, soit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{3}\cos^3(t)$ (coup de pot, cette primitive !), ce qui donne $F_2(x) = \displaystyle\int -t\sin(t)\cos^2(t) = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \int \frac{1}{3}\cos^3(t)\ dt = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{3}\int \cos(t)(1-\sin^2(t))\ dt = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\sin^3(x)$. Finalement, on trouve brillamment $F(x) = \dfrac{x}{3}\cos^3(x) - x\cos(x) + \dfrac{1}{9}\sin^3(x) + \dfrac{2}{3}\sin(x)$. Une autre méthode possible est la linéarisation : $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$, donc $\sin^3(x) = \dfrac{3}{4}\sin(x) - \dfrac{1}{4}\sin(3x)$, on peut ensuite effectuer une IPP sur chaque moitié (en dérivant le x à chaque fois) : $F(x) = \displaystyle\int \frac{3}{4}t\sin(t) - \frac{1}{4}t\sin(3t)\ dt = -\frac{3}{4}x\cos(x) + \frac{3}{4}\int \cos(t)\ dt + \frac{1}{4}\frac{x\cos(3x)}{3} - \frac{1}{12}\int \cos(3t)\ dt = -\frac{3}{4}x\cos(x) + \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}x\cos(3x) - \frac{1}{36}\sin(3x)$ (quitte à se débarasser de toutes les constantes).

- On ne se fatigue surtout pas, f est à peu près de la forme $u'\sqrt{u}$, qui a une primitive proportionnelle à $u^{\frac{3}{2}}$. Ici, on trouve donc directement $F(x) = \dfrac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}$ (définie sur $\mathbb{R}$ tout comme f).
- On a vraiment très envie d'effectuer le changement de variables $u = \ln(t)$, ce qui donne $du = \dfrac{1}{t}dt$ (ça tombe bien, $\dfrac{1}{t}$ se met facilement en facteur dans l'intégrale) pour trouver $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{t(1+\ln^2(t))}\ dt = \int \frac{1}{1+u^2}\ du = \arctan(\ln(x))$, valable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on pouvait bien sûr remarquer directement que la fonction f est la dérivée de la fonction obtenue).
- Effectons deux IPP successives en dérivant à chaque fois la fonction hyperbolique et en primitivant la fonction trigonométrique (on peut bien sûr faire le contraire, ça marche pareil) : $F(x) = \displaystyle\int \mathrm{ch}(t)\cos(t)\ dt = \mathrm{ch}(x)\sin(x) - \int \mathrm{sh}(t)\sin(t)\ dt = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x) - \int \mathrm{ch}(t)\cos(t)\ dt = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x) - F(x)$. Du coup, $2F(x) = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x)$ et $F(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x))$.
- Une toute petite astuce suffit : $F(x) = \displaystyle\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\ dt = \int 1 - \frac{1}{1+t^2}\ dt = x - \arctan(x)$.
- Ici, on peut au choix utiliser la même astuce que dans le calcul précédent (ce qui est sous l'intégrale s'écrit $\sqrt{x+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, et tout s'intègre directement), ou bien, pour mieux voir ce qui se passe, effectuer le petit changement de variable $u = t+1$: $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}\ dt = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}\ du = \int \sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\ du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{u}}{2} = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{x-1} = \left(\frac{2}{3}x - \frac{7}{6}\right)\sqrt{x-1}$. Cette primitive est valable sur tout l'intervalle $]-1,+\infty[$.
- Encore un bon exemple d'IPP, en posant $u(t) = \ln(1+t^2)$, soit $u'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, et $v'(t) = 1$, soit $v(t) = t$. On trouve $F(x) = \displaystyle\int \ln(1+t^2)\ dt = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2t^2}{1+t^2}\ dt = x\ln(1+x^2) - 2\int 1 - \frac{1}{1+t^2}\ dt = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)$ (même astuce que la neuvième intégrale de ce même exercice pour la fin du calcul).
- À part une IPP, on ne voit pas bien quoi faire : posons $u(t) = \ln(t+\sqrt{t^2-1})$, soit $u'(t) = \dfrac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}{t+\sqrt{t^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$; et $v'(t) = 1$, soit $v(t) = t$. On trouve alors $F(x) = \displaystyle\int \ln(t+$

$\sqrt{t^2-1})\ dt = x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\ dt = x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1}$, primitive valable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 2 (* à **)

- Un simple changement de variables $t = x+1$ simplifie énormément le calcul : $I = \displaystyle\int_0^1 (x-2)(x+1)^5\ dx = \int_1^2 (t-3)t^5\ dt = \int_1^2 t^6 - 3t^5\ dt = \left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{2}\right]_1^2 = \frac{127}{7} - \frac{63}{2} = -\frac{187}{14}$.
- Une simple enchainement d'IPP suffit, en posant $u(x) = (\ln(x))^3$, soit $u'(x) = \dfrac{3(\ln(x))^2}{x}$; et $v'(x) = x^2$, soit $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$, ce qui donne $I = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln(x))^3\ dx = \left[\frac{x^3}{3}(\ln(x))^3\right] - \int_1^e x^2(\ln(x))^2\ dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e x^2(\ln(x))^2\ dx$. On effectue une deuxième IPP en posant $u(x) = (\ln(x))^2$, soit $u'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$; et $v'(x) = x^2$, soit $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$, pour trouver $I = \dfrac{e^3}{3} - \left[\dfrac{x^3}{3}\ln(x)^2\right] + \displaystyle\int_1^e \frac{2x^2}{3}\ln(x) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{3} + \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln(x)\ dx$. Allez, une dernière IPP pour finir, en posant $u(x) = \ln(x)$, soit $u'(x) = \dfrac{1}{x}$; et $v'(x) = x^2$, donc $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$. On finit par obtenir $I = \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{x^3}{3}\ln(x)\right] - \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_1^e \frac{x^2}{3}\ dx = \frac{2e^3}{9} - \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{2e^3}{9} - \frac{2e^3-2}{27} = \frac{4e^3+2}{27}$.
- On reconnait ici à très peu de choses près une forme $\dfrac{u'}{u}$ qui s'intègre directement (si vraiment on n'est pas réveillés, un petit changement de variables $t = e^{2x}$ permet aussi de se tirer d'affaire) : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\ln(2)}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\ dx = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2)\right]_0^{\frac{\ln(2)}{2}} = \frac{1}{2}(\ln(4)-\ln(3)) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
- On peut s'en sortir rapidement en se souvenant que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}(\cos(2x)+1)$, d'où $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int 0^{2\pi} \cos(2x) + 1\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x) + x\right]_0^{2\pi} = \pi$. Allez, une technique hyper astucieuse pour ceux qui aiment : on peut constater que $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\ dx$ (intégrer le carré du cosinus ou du sinus sur une période donne la même chose), puis faire la somme des deux pour trouver $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x) + \sin^2(x)\ dx = \int_0^{2\pi} 1\ dx = 2\pi$. Chacune des deux intégrales vaut donc π.
- On reconnait immédiatement $\dfrac{u'}{u^2}$ (ce n'est pas parce que le x est au dénominateur qu'il faut se laisser avoir), du coup $I = \left[-\dfrac{1}{\ln(x)}\right]_e^{e^2} = -\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$ (au pire, le changement de variable $t = \ln(u)$ ramène au même calcul).
- On peut intégrer directement si on est un tout petit peu malin : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+(x^2)^2}\ dx = \left[\frac{1}{2}\arctan(x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$.
- Parfois, la méthode bêtement bourrine est efficace, remplacer joyeusement tout par des exponentielles fonctionne. Commençons par calculer $\mathrm{sh}^2(x)\,\mathrm{ch}^2(x) = \dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} \times \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} = \dfrac{e^{4x}-2+e^{-4x}}{16}$, puis intégrons : $I = \dfrac{1}{16}\displaystyle\int_0^{\ln(2)} e^{4x} + e^{-4x} - 2\ dx = \frac{1}{16}\left[\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{4} - 2x\right]_0^{\ln(2)} =$

$\frac{1}{16}\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16\times 4}+\frac{1}{4}-2\ln(2)\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{1\ 024}-\frac{\ln(2)}{8}=\frac{255}{1\ 024}-\frac{\ln(2)}{8}$.

- Un exemple surprenant de double intégration par parties : on commence par poser $u(x)=\cos(x)$, donc $u'(x)=-\sin(x)$; et $v'(x)=v(x)=e^x$, pour trouver $I=[e^x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin(x)\ dx$, et on recommence, toujours avec $v'(x)=v(x)=e^x$, et $u(x)=\sin(x)$, donc $u'(x)=\cos(x)$. On a cette fois $I=-1+[e^x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos(x)\ dx=-1+e^{\frac{\pi}{2}}-I$. Autrement dit, $2I=e^{\frac{\pi}{2}}-1$, et $I=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$.
- De qui se moque-t-on dans cet exercice ? On a déjà fait la même en plus facile à la deuxième intégrale ! Au moins, ici, deux IPP suffiront, je ne détaille pas autant que la première fois, on dérive bien sûr toujours les puissances de ln pour intégrer les x : $I=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)^2\right]_1^e-\int_1^e x\ln(x)\ dx=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e+\int_1^e\frac{x}{2}\ dx=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2-1}{4}$.
- On aimerait bien faire une IPP mais une primitive de $\sin^2$, ce n'est pas forcément trivial à trouver. Soit on en trouve une quand même en pensant qu'il y a un lien entre $\sin^2(x)$ et $\cos(2x)$ (petit truc déjà exploité un peu plus haut), soit on utilise une astuce en posant $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^2(x)\ dx$, et en calculant la somme et la différence de I et de J. Allez, faisons comme ça : $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(\sin^2(x)+\cos^2(x))\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\ dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$. La différence demande plus de boulot : $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(\sin^2(x)-\cos^2(x))\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-x^2\cos(2x)\ dx$. Il va falloir faire une double IPP, en dérivant à chaque fois les x et en primitivant les fonctions trigonométriques : $u(x)=x^2$ donc $u'(x)=2x$; $v'(x)=\cos(2x)$, donc $v(x)=\frac{\sin(2x)}{2}$, pour trouver $I-J=\left[-\frac{x^2}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(2x)\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(2x)\ dx$. Il va évidemment falloir une deuxième IPP : $I-J=\left[-x\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2x)}{2}\ dx=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$. Ne reste plus qu'à écrire que $I=\frac{I+J}{2}+\frac{I-J}{2}=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$.
- Il est plus simple pour la rédaction de calculer par IPP $J=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\ dx$: on pose $u(x)=\frac{1}{1+x^2}$, soit $u'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; et $v'(x)=1$, donc $v(x)=x$. On trouve alors $J=\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1+\int_0^1\frac{2x^2}{(1+x^2)2}\ dx=\frac{1}{2}+2\int_0^1\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}\ dx=\frac{1}{2}+2J-2I$. Autrement dit, $I=\frac{1}{2}J+\frac{1}{4}$. Or, on sait calculer directement $J=[\arctan(x)]_0^1=\frac{\pi}{4}$, dont on déduit $I=\frac{\pi+2}{8}$.
- Dans ce genre de cas, le changement de variable $t=1-x$ est le bienvenu (attention au changement de signe : $dt=-dx$) : $I=\int_1^0-(1-t)^2\sqrt{t}\ dt=\int_0^1(1-2t+t^2)\sqrt{t}\ dt=\int_0^1\sqrt{t}-2t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{5}{2}}\ dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{2}{7}=\frac{16}{105}$.
- On a sous l'intégrale une forme $u'u$, qui est à un facteur près la dérivée de u^2, on fait donc une intégration directe : $I=\left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^e=\frac{1}{2}$.
- C'est la même que la précédente ! Ah non, zut, la racine carrée complique tout. Pas tant que

ça en fait : $I = \int_1^e \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$. effectuons un changement de variable en posant $t = \sqrt{x}$, donc $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, pour trouver $I = \int_1^{\sqrt{e}} 4\ln(t)\ dt = 4[t\ln(t) - t]_1^{\sqrt{e}} = 4(\sqrt{e}\ln(\sqrt{e}) - \sqrt{e} + 1) = 4 - 2\sqrt{e}$.

- Empressons-nous de poser $t = x + 1$ pour trouver $I = \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{\sqrt{t}}\ dt = \int_1^2 t^{\frac{5}{2}} - 3t^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt = \left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t}\right]_1^2 = \frac{2(8\sqrt{2}-1)}{7} - \frac{6(4\sqrt{2}-1)}{5} + 2(2\sqrt{2}-1) - 2\sqrt{2} + 2 = \left(\frac{16}{7} - \frac{24}{5} + 2\right)\sqrt{2} - \frac{2}{7} + \frac{6}{5} = \frac{32 - 18\sqrt{2}}{35}$

Exercice 3 (** à ***)

- Ici, les plus malins feront la décomposition en éléments simples à vue (même pas besoin d'identification) : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, donc $I = \int_2^3 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\ dx = [\ln(x) - \ln(x+1)]_2^3 = \ln(3) - \ln(4) - \ln(2) + \ln(3) = 2\ln(3) - 3\ln(2) = \ln\left(\frac{9}{8}\right)$.
- La décomposition en éléments simples va donner $\frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-2}$. En multipliant par $x-2$ en en prenant $x = 2$, on trouve $\frac{3}{5} = c$. En multipliant tout par x et en prenant la limite en $+\infty$, $0 = a + c$, donc $a = -\frac{3}{5}$. Pour achever le calcul, on regarde pour $x = 0$: $-\frac{1}{2} = b - \frac{c}{2}$, donc $b = \frac{c-1}{2} = -\frac{1}{5}$. Finalement, $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{5} \times \frac{1}{x-2} - \frac{3}{5}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{5(x^2+1)}\ dx = \left[\frac{3\ln(2-x)}{5} - \frac{3\ln(x^2+1)}{10}\ln(x^2+1) - \frac{\arctan(x)}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(2)\right) - \frac{3}{10}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}(2\ln(3) - 2\ln(2) - \ln(5)) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}\ln\left(\frac{9}{20}\right) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. On ne peut pas vraiment simplifier plus, notamment l'arctangente qui ne correspond pas le moins du monde à un angle remarquable.
- On revient à du plus facile : $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, on peut décomposer sous la forme $\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$. En multipliant par $x - 1$ puis par $x - 3$, on trouve facilement $-\frac{1}{2} = b$ et $\frac{1}{2} = b$, donc $I = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\ dx = \frac{1}{2}[\ln(3-x) - \ln(1-x)]_{-1}^0 = \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(3) - \ln(2)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.
- Comme on a déjà vu quasiment le même calcul en cours, je passe les détails : $I = \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\ dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}\ dt = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}t)^2 + 1}\ dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
- Les primitives seront définies sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, on va déterminer la primitive définie sur le premier intervalle s'annulant en 0. On commence par une IPP en dérivant l'arctangente et en primitivant le facteur 1 : comme $x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ a pour dé-

rivée $\dfrac{-1}{(x-2)^2}$, celle de $t \mapsto \arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ vaut $\dfrac{-1}{(x-2)^2}\dfrac{1}{1+(\frac{x-1}{x-2})^2} = -\dfrac{1}{2x^2-6x+5}$. On trouve alors $F(x) = x\arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{2t^2-6t+5}\,dt$. Le dénominateur de la nouvelle intégrale ne s'annule jamais, mais on peut écrire $\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{2t^2-6t+5}\,dt = \int_0^t \dfrac{1}{4}\dfrac{4t-6}{2t^2-6t+5} + \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2t^2-6t+5}\,dt = \dfrac{1}{4}[\ln(2t^2-6t+5)]_0^x + \int_0^x \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(t-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}}\,dt = \dfrac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) - \dfrac{1}{4}\ln(5) + \int_0^x + \int_0^x \dfrac{3}{(2t-3)^2+1}\,dt = \dfrac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) - \dfrac{1}{4}\ln(5) + \dfrac{3}{2}\arctan(2x-3) - \dfrac{3}{2}\arctan(-3)$. Finalement, $F(x) = x\arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \dfrac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) + \dfrac{3}{2}\arctan(2x-3) - \dfrac{1}{4}\ln(5) + \dfrac{3}{2}\arctan(3)$.

Exercice 4 (**)

1. Calculons ! On trouve facilement $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{2}\,dt = \dfrac{1}{2}$, puis $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) \simeq 0.69$, et même $u_2 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan(t)]_0^1 = \dfrac{\pi}{4} \simeq 0.79$. Beaucoup moins facilement, on peut calculer $u_3 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^3}\,dt = \dfrac{\ln(2)}{3} + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9} \simeq 0.84$ (je ne refais pas le calcul puisque c'est un exemple vu en cours !).
Pour s'amuser un peu, on peut calculer u_4. Commençons par factoriser le dénominateur t^4+1. les racines de ce polynômes sont les racines quatrièmes de -1, qui ont pour module 1 (comme -1) et pour argument $\dfrac{\pi}{4}$ modulo $\dfrac{\pi}{2}$ pusique -1 a pour ardument π. elles sont donc égales à $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. En regroupant les racines conjugués pour retrouver des facteurs réels, on obtient $t^4+1 = (t-e^{i\frac{\pi}{4}})(t-e^{-i\frac{\pi}{4}})(t-e^{i\frac{3\pi}{4}})(t-e^{-i\frac{3\pi}{4}}) = \left(t^2 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+1\right)\left(t^2-2\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+1\right) = (t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)$. On peut donc décomposer en éléments simple sous la forme $\dfrac{1}{1+t^4} = \dfrac{at+b}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \dfrac{ct+d}{t^2-\sqrt{2}t+1}$. En regardant en 0, on trouve $b+d=1$; en multipliant par t et en regardant la limite en $+\infty$, on trouve $a+c=0$. Et pour vous faire plaisir, une bidouille immonde pour obtenir plus de renseignements : en remplaçant t par $-t$, on trouve dans l'équation initiale $\dfrac{1}{1+t^4} = \dfrac{-at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \dfrac{-ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1}$, ce qui nous conduit « par identification » à affirmer que $-a=c$, et surtout $b=d$. On a donc $b=d=\dfrac{1}{2}$. Une dernière information, par exemple en $t=1$ où $\dfrac{1}{2} = \dfrac{a+b}{2+\sqrt{2}} + \dfrac{c+d}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{(a+b)(2-\sqrt{2})+(c+d)(2+\sqrt{2})}{2}$, donne $1 = 2\sqrt{2}c+2$, soit $c = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ et $a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. On en déduit donc que $\dfrac{1}{1+t^4} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \dfrac{t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \dfrac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \dfrac{\sqrt{2}}{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\right)$, ce qui se primitive « facilement » en $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}(\ln(t^2+\sqrt{2}t+1) - \ln(t^2-\sqrt{2}t+1) + 2\arctan(\sqrt{2}t+1) + 2\arctan(\sqrt{2}t-1))$.
On en déduit que $u_4 = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}(\ln(2+\sqrt{2}) - \ln(2-\sqrt{2}) + 2\arctan(1+\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}-1)) \simeq 0.87$ (on peut simplifier le résultat si on a des connaissances pointues en trigonométrie classique et hyperbolique, mais on s'en passera !). Bon, on va peut-être s'arrêter là ?

2. Il suffit en fait de constater que, sur $[0,1]$, on aura toujours $t^n \geqslant t^{n+1}$, donc $\dfrac{1}{1+t^n} \leqslant \dfrac{1}{1+t^{n+1}}$, et il suffit d'appliquer donné en début d'énoncé pour en déduire que $u_n \leqslant u_{n+1}$. Autrement dit, la suite (u_n) est croissante (ce qui est cohérent avec les valeurs calculées à la première question).
3. Pour montrer ce genre d'encadrement, on commence par encadrer la fonction à l'intérieur de l'intégrale. Commençons par écrire $1 - u_n = \displaystyle\int_0^1 1\ dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\ dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\ dt$ en regroupant les deux intégrales. Or, $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant 1 + t^n \geqslant 1$, donc $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^n} \leqslant t^n$. En appliquant le résultat de l'énoncé, on peut mettre des intégrales autour de tout ça : $\displaystyle\int_0^1 0\ dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\ dt \leqslant \int_0^1 t^n\ dt$. L'intégrale de gauche est évidemment nulle, celle de droite vaut $\dfrac{1}{n+1}$ par intégration directe, d'où l'encadrement demandé. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, une application immédiate du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - u_n = 0$, donc (u_n) converge vers 1.
4. On effectue une IPP intelligente sur $1 - u_n$, en posant $v'(t) = \dfrac{t^{n-1}}{1+t^n}$, donc $u(t) = \dfrac{\ln(1+t^n)}{n}$, ce qui laisse $u(t) = t$ et $u'(t) = 1$. On obtient alors $1 - u_n = \left[\dfrac{t\ln(1+t^n)}{n}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)}{n}\ dt$, ce qui donne directement la formule annoncée.
5. Il suffit en fait de connaitre la majoration classique $\ln(1+x) \leqslant x$, qui est valable sur $]-1,+\infty[$. Si on ne la connait pas, on la redémontre en quelques secondes : en posant $f(x) = \ln(1+x) - x$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$, donc la fonction admet un maximum en 0, et comme $f(0) = 0$, elle est toujours négative. On en déduit ici que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\ dt \leqslant \int_0^1 t^n = \frac{1}{n+1}$.
6. Il suffit de multiplier par n l'égalité de la question 4, puis d'appliqer l'encadrement de la 5 pour trouver $\ln(2) - \dfrac{1}{n+1} \leqslant n(1-u_n) \leqslant \ln(2)$, ce qui prouve à l'aide d'une nouvelle application du théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(1-u_n) = \ln(2)$.

Exercice 5 (***)

1. Posons donc $z(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et dérivons z : $z'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$. La fonction z est constante sur $]0,+\infty[$, de valeur égale à $f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.
2. (a) Je ne ferai même pas de dessin clair : par définition, $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ est l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et la droite verticale située à l'abscisse x. De même, $\displaystyle\int_0^{f(x)} g(t)\ dt$ est l'aire située entre la courbe de g etc. Mais on sait bien que la courbe de g est symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. Quitte à inverser le rôle des deux axes, on peut donc visualiser la courbe de g dans le même repère que celle de f, et la deuxième intégrale correspond alors exactement à l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des ordonnées et la droite horizontale située à ordonnée $f(x)$. Quand on additionne les deux aires, on obtient exactement l'aire du rectangle constitué par les deux axes et les deux droites (l'une verticale, l'autre horizontale) précédemment décrites.

Ce rectangle est de largeur x et de hauteur $f(x)$, il a donc pour aire $xf(x)$, ce qui prouve notre formule.

(b) Par définition, $\int_0^x f(t)\ dt + \int_0^{f(x)} g(t)\ dt = F(x) + G(f(x))$ (on prend les primitives s'annulant en 0 pour simplifier le calcul).

(c) Pour faire réapparaitre les fonctions f et g, dérivons donc $H(x) = F(x) + G(f(x))$, on obtient $H'(x) = f(x) + f'(x)g(f(x)) = f(x) + xf'(x)$ puisque, par définition de la réciproque, $g(f(x)) = x$. Or, la formule obtenue pour $H'(x)$ est la même que celle de la dérivée de $xf(x)$. On en déduit que $H(x) = xf(x) + k$. Reste à constater que $H(0) = F(0) + G(f(0)) = F(0) + G(0) = 0$ (puisque les primitives s'annulent en 0) pour conclure que $H(x) = xf(x)$.

3. (a) On peut effectuer la division euclidienne, ou procéder par identification : $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + (\sqrt{2}a + b)x^3 + (a + b\sqrt{2} + c)x^2 + (b + c\sqrt{2})x + c$. Par identification, on doit donc avoir $a = 1$; $\sqrt{2}a + b = 0$, soit $b = -\sqrt{2}$; $a + b\sqrt{2} + c = 0$, soit $c = -1 + 2 = 1$; $b + c\sqrt{2} = 0$ ce qui est vrai ; et $c = 1$ ce qui est vrai aussi. Finalement, $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

(b) Comme il n'y a pas de racines pour le dénominateur, le plus rapide est sûrement de faire une identification, ou d'être astucieux ! Constatons par exemple que $\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1 - x^2 + \sqrt{2}x - 1}{x^4 + 1} = \frac{2\sqrt{2}x}{x^4 + 1}$. Il suffit de tout multiplier par $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ pour obtenir $\frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{x}{2\sqrt{2}(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} - \frac{x}{2\sqrt{2}(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}$. Autrement dit, avec les notations de l'énoncé, $b = d = 0$, et $c = -a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) Calculons donc $\int_0^1 \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\ dx + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\ dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1)]_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}\ dx = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}))^2 + 1}\ dx = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x - 1)\right]_0^1 = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{4}$.

On fait le même calcul (ou presque) pour la deuxième moitié : $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\ dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1)]_0^1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}\ dx = \frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{2} - [\arctan(\sqrt{2}x + 1)]_0^1 = \frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{2} - \arctan(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}$.

On regroupe maintenant les deux résultats pour obtenir
$J = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2} - 1) - \frac{\pi}{4}\right)$. Or, $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$ (en multipliant par la quantité conjuguée), donc $\arctan(\sqrt{2} - 1) + \arctan(1 + \sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\ln(2 + \sqrt{2}) - \ln(2 - \sqrt{2}) = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{6 + 4\sqrt{2}}{2}\right) = \ln(3 + 2\sqrt{2})$. En regroupant tout, on obtient finalement (ouf !) : $J = \frac{\pi - \ln(3 + 2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}$.

4. La fonction tangente étant continue strictement croissante et positive sur l'intervalle considéré, f aussi, et elle est donc bijective vers $[0, 1]$ (puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = \sqrt{1} = 1$). Si $y = \sqrt{\tan(x)}$, alors $x = \arctan(y^2)$, donc $g(x) = \arctan(x^2)$ (même pas de piège !).

5. On souhaite donc calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x^2)\ dx$. Procédons par IPP en posant $u(x) = \arctan(x^2)$, donc $u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$, et $v'(x) = 1$ qui donne $v(x) = x$. On obtient alors $\displaystyle\int_0^1 g(x)\ dx = [x\arctan(x^2)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}\ dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi - \ln(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2}) + \pi(1-\sqrt{2})}{4}$ (on a utilisé le résultat du calcul de J).

   Il ne reste plus, en appliquant la question 2 avec $x = \dfrac{\pi}{4}$, qu'à constater que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\ dt + \int_0^1 g - t)\ dt = \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, donc $\displaystyle I = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 g(t)\ dt = 2J = \frac{\pi - \ln(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 6 (* à **)

1. On résout l'équation sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée $y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $y_h(x) = Ke^{2x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

   On peut chercher une solution particulière à l'équation sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{2x}$. On a alors $y'(x) = (K'(x) + 2K(x))e^{2x}$, donc y_p est solution si $K'(x) = (\sinh x - 2x\cosh x)e^{-2x} = \dfrac{e^{-x} - e^{-3x}}{2} - xe^{-x} - xe^{-3x}$, soit par exemple $\displaystyle K(x) = \int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2} - te^{-t} - te^{-3t}\ dt = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-3x} - \frac{1}{6} + [te^{-t}]_0^x - \int_0^x e^{-t}\ dt + \left[t\frac{e^{-3t}}{3}\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-3t}}{3}\ dt = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{-3x} + xe^{-x} + e^{-x} + \frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{9} + A = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + \left(\frac{x}{3} + \frac{5}{18}\right)e^{-3x} + A$, où A est une constante qu'on peut ignorer (on a effectué des intégrations par partie pour les produits de t par des exponentielles). Les solutions complètes sont donc les fonctions $y(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^x + \left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{18}\right)e^{-x} + Ke^{2x}$.

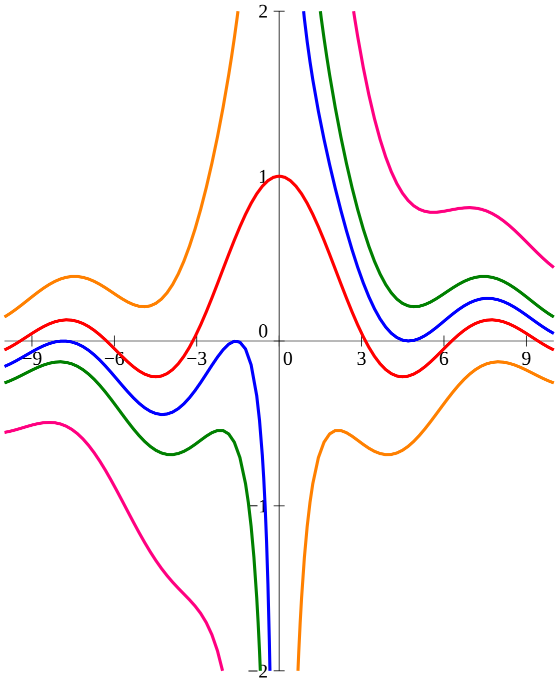
   Autre possibilité pour trouver une solution particulière, écrire le second membre sous la forme $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} - x(e^x + e^{-x}) = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^x - \left(\dfrac{1}{2} + x\right)e^{-x}$ et utiliser le principe de superposition. On cherche d'abord une solution à l'équation $y' - 2y = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^x$ sous la forme $y_1(x) = (ax+b)e^x$. On a alors $y_1'(x) = (ax + a + b)e^x$, donc y_1 est solution si $(-ax + a - b)e^x = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^x$, soit $a = 1$ et $b = \dfrac{1}{2}$. On obtient donc $y_1(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^x$. De même, on cherche une solution à l'équation $y' - 2y = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^{-x}$ sous la forme $y_2(x) = (cx+d)e^{-x}$. On a alors $y_2'(x) = (-cx - d + c)e^{-x}$, et y_2 est solution si $(-3cx + c - 3d)e^{-x} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^{-x}$, soit $c = -\dfrac{1}{3}$ et $d = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{18}$. On obtient donc $y_2(x) = -\dfrac{x}{3} - \dfrac{5}{18}$, ce dont on déduit la même solution particulière que ci-dessus (et bien sûr les mêmes solutions générales).

2. Comme il faut diviser par t pour mettre l'équation sous forme usuelle, la résolution s'effectuera sur les intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. On a alors $y' + \dfrac{y}{t} = \dfrac{\cos t}{t}$. L'équation homogène associée est $y' + \dfrac{y}{t} = 0$, dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{\ln|t|} = \dfrac{K}{t}$, $K \in \mathbb{R}$ (on peut enlever la valeur absolue quitte à changer le signe de la constante sur $\mathbb{R}^{-*}$).

   On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y_p(t) = \dfrac{K(t)}{t}$, d'où on tire $\dfrac{K'(t)}{t} =$

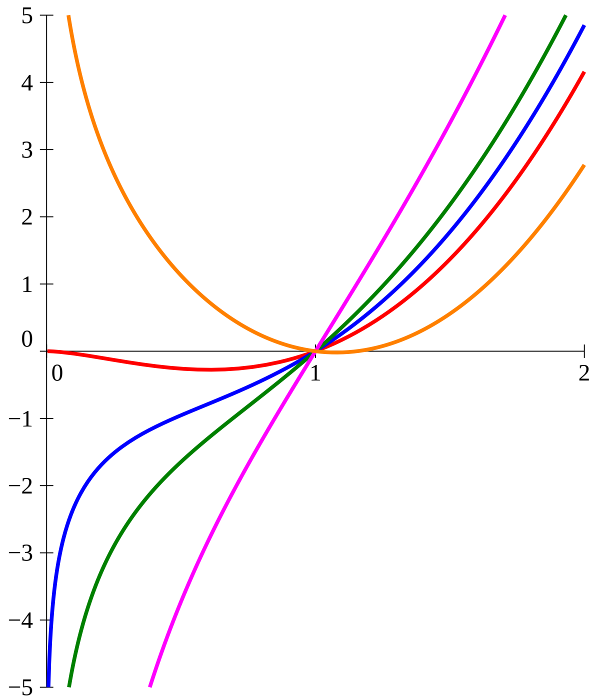
$\frac{\cos t}{t}$. Une solution particulière est donc la fonction $\frac{\sin t}{t}$, et les solutions générales de l'équation sont de la forme $y(t) = \frac{\sin t + K}{t}$. Pour tenter de recoller les solutions sur $\mathbb{R}$, il faut savoir que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ (c'est par exemple une conséquence du fait qu'il s'agit du taux d'accroissement de la fonction sinus en 0, qui tend donc vers $(\sin)'(0) = \cos(0) = 1$). Il faut alors avoir $K = 0$ pour obtenir une fonction prolongeable en 0 en posant $f(0) = 1$. En admettant que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est dérivable en 0, on obtient donc une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

Quelques courbes de solutions : en rouge pour $K = 0$ (donc la solution définie sur $\mathbb{R}$, en bleu $K = 1$, en vert $K = 2$, en rose $K = 5$ et en orange $K = -2$ (les valeurs négatives de K donnent des courbes symétriques par rapport à l'axe des ordonnées de celles obtenues pour les valeurs positives) :



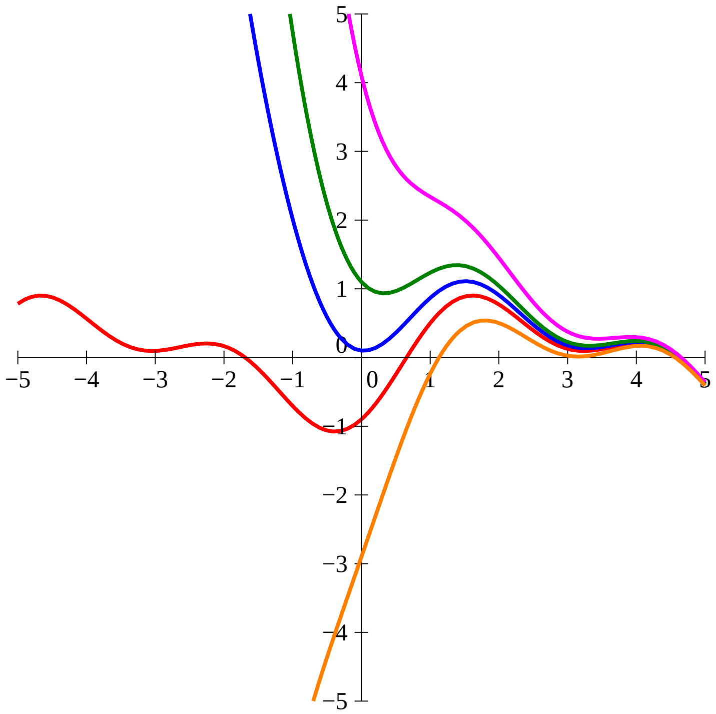
3. On résout l'équation sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée $y' + y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : t \mapsto Ke^{-t}$, on recherche donc y_p sous la forme $K(t)e^{-t}$, ce qui nous donne $K'(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t}$, soit $K'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$. Le membre de droite étant de la forme $\frac{u'}{u}$, on peut prendre comme primitive $K(t) = \ln(1+e^t)$. Les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y : t \mapsto (\ln(1+e^t) + K)e^{-t}$, $K \in \mathbb{R}$.
4. Pour les solutions de l'équation homogène, cf l'équation précédente. Plutôt que d'utiliser la méthode de variation de la constante (qui amène un calcul de primitive par intégration par parties peu agréable), nous allons directement chercher une solution de la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$. On a donc $y_p'(x) = (2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c)e^{2x}$, et y_p est solution, en factorisant par e^{2x}, si et seulement si $3ax^2 + (2a+3b)x + b + 3c = x^2 - 2x + 2$, soit $a = \frac{1}{3}$; $2a + 3b = -2$, donc $b = -\frac{8}{9}$; et enfin $b + 3c = 2$, donc $c = \frac{26}{27}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-x} + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{26}{27}\right)e^{2x}$.
5. Comme il faut diviser par $x \ln x$, on va résoudre sur les intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ (l'équation

ne peut pas avoir de sens ailleurs que sur $\mathbb{R}^{+*}$ à cause du ln). On obtient donc $y' + \dfrac{y}{x\ln x} = 3x\ln x$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto Ke^{\ln|\ln|x||} = K\ln x$ (à un changement de constante près, cette formule est valable sur les deux intervalles de résolution). On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = K(x)\ln x$, donc $y_p'(x) = K'(x)\ln(x) + \dfrac{K(x)}{x}$. En reprenant l'équation, y_p est solution si $K'(x)\ln x = 3x\ln x$, on peut donc prendre $K(x) = \dfrac{3}{2}x^2$ et les solutions générales sont les fonctions $y : x \mapsto \left(\dfrac{3}{2}x^2 + K\right)\ln x$. Toutes les solutions se prolongent en 1 en posant $y(1) = 0$. De plus, les solutions sont dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $y'(x) = 3x\ln(x) + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{K}{x}$, qui prend donc la valeur $\dfrac{3}{2} + K$ en 1. On obtient ainsi un recollement uniquement si la constante sur $]0;1[$ est la même que sur $]1;+\infty[$.
Des allures de courbes avec les mêmes conventions pour les couleurs que dans la deuxième équation ci-dessus :



6. Du classique, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-2x}$. On cherche directement une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On aura donc $y_p'(x) = 2ax + b$, et y_p sera solution si $2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$, ce qui impose $a = \dfrac{1}{2}$; $2a + 2b = 0$ donc $b = -\dfrac{1}{2}$; et $b + 2c = 0$ donc $c = \dfrac{1}{4}$. On obtient $y_p(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} + Ke^{-2x}$.
7. On résout sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\frac{x^3}{3}}$. On ne cherche pas de solution particulière puisqu'il y en a une qui nous saute aux yeux : la fonction constante égale à -1. Les solutions générales sont donc les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-\frac{x^3}{3}} - 1$. Si on veut de plus $y(0) = 0$, il faut avoir $K - 1 = 0$, donc $K = 1$. La solution unique au problème de Cauchy posé est donc la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^3}{3}} - 1$.
8. On ne peut résoudre que sur l'intervalle $]-1;1[$. L'équation homogène $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\arcsin x}$. Encore une fois, la fonction constante égale à -1 est une solution particulière donc les solutions générales sont de la forme $x \mapsto Ke^{-\arcsin x} - 1$.

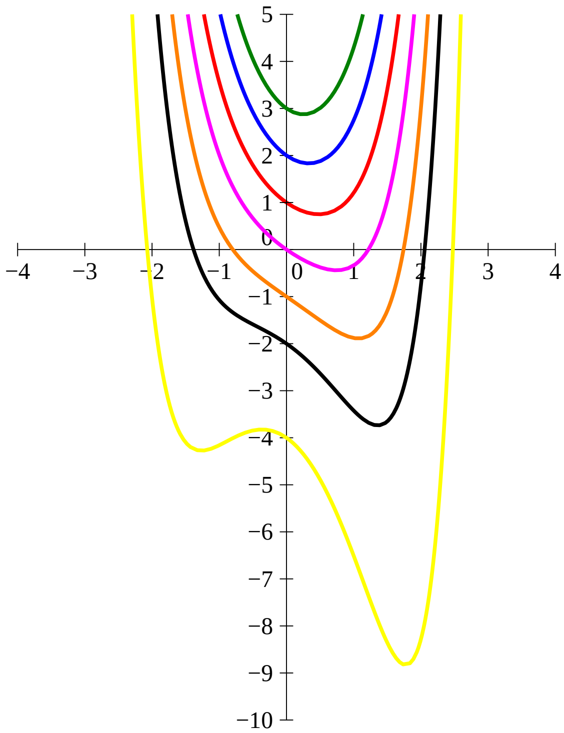
9. On résout sur les intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. L'équation homogène associée $y' + \dfrac{y}{2t} = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : t \mapsto Ke^{-\ln\left|\frac{t}{2}\right|} = \dfrac{K}{\sqrt{|t|}}$. On cherche y_p sous la forme $\dfrac{K(t)}{\sqrt{|t|}}$, soit $y_p'(t) = \dfrac{K'(x)}{\sqrt{|t|}} - \dfrac{K(t)}{2t\sqrt{|t|}}$, et on obtient $\dfrac{K'(t)}{\sqrt{|t|}} = \dfrac{t^{n-1}}{2}$, donc $K'(t) = \dfrac{1}{2}|t|^{n-\frac{1}{2}}$. Finalement, $y_p(t) = \dfrac{t^n}{2n+1}$ convient (sur chacun des deux intervalles), et les solutions générales de l'équation sont les fonctions $y : t \mapsto \dfrac{t^n}{2n+1} + \dfrac{K}{\sqrt{|t|}}$. Si on souhaite recoller les morceaux en 0, seule la valeur $K = 0$ est possible, et la fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{2n+1}$ est la seule solution définie sur $\mathbb{R}$.
10. L'équation homogène a pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{-x}$. On va ici utiliser le principe de superposition et commencer par chercher une solution à l'équation $y' + y = \sin(x)$ sous la forme $y_1(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$. On a $y_1'(x) = a\cos(x) - b\sin(x)$, donc y_1 est solution si $(a+b)\cos(x) + (a-b)\sin(x) = \sin(x)$. Il suffit donc d'avoir $a + b = 0$ et $a - b = 1$, soit $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$, donc $y_1(x) = \dfrac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$. De même, on cherche à trouver une solution de l'équation $y' + y = \sin(2x)$ sous la forme $y_2(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$, ce qui donne $y_2'(x) = 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x)$. On obtient comme tout à l'heure un système, en l'occurence $a - 2b = 1$ et $b + 2a = 0$. Comme $b = -2a$, $5a = 1$ donc $a = \dfrac{1}{5}$, puis $b = -\dfrac{2}{5}$, et $y_2(x) = \dfrac{1}{5}\sin(2x) - \dfrac{2}{5}\cos(2x)$. Finalement, les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{1}{2}\sin(x) - \dfrac{1}{2}\cos(x) + \dfrac{1}{5}\sin(2x) - \dfrac{2}{5}\cos(2x) + Ke^{-x}$. Allez, ça fait un moment que je n'ai pas fait joujou avec des tracés de courbes colorées :



11. L'équation homogène associée a des solutions de la forme Ke^{3x}. On utilise ensuite le principe de superposition en cherchant d'abord une solution à l'équation $y' - 3y = x^2e^x$ sous la forme $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. On a alors $y_1'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx + c)e^x$, donc y_1 est solution si $((a - 3a)x^2 + (2a + b - 3b)x + (b + c - 3c))e^x = x^2e^x$. Les conditions imposées sont $-2a = 1$, donc $a = -\dfrac{1}{2}$; $2a - 2b = 0$, donc $b = -\dfrac{1}{2}$; et $b - 2c = 0$, donc $b = -\dfrac{1}{4}$, ce qui donne

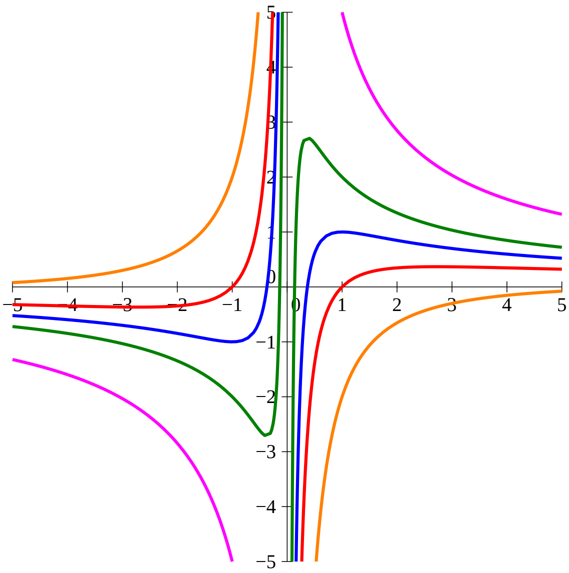
$y_1(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^x$. De même, on cherche une solution à l'équation $y' - 3y = xe^{3x}$ sous la forme $y_2(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$ (il faut prendre un polynôme du second degré car on est dans le cas particulier où l'exponentielle est la même que celle de l'équation homogène). On a donc $y_2'(x) = (2ax + b + 3ax^2 + 3bx + 3c)e^{3x}$, donc y_2 est solution si $((3a - 3a)x^2 + (2a + 3b - 3b)x + b + 3c - 3c)e^{3x} = xe^{3x}$. Les seules conditions sont donc $2a = 1$ et $b = 0$. On peut choisir $y_2(x) = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$, et on en déduit que les solutions de l'équation complète sont les fonctions $x \mapsto \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + K\right) e^{3x}$. Comme $y(0) = -\frac{1}{4} + K$, la solution recherchée est celle obtenue pour $K = \frac{5}{4}$, soit $y(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}\right) e^{3x}$.

12. La fonction ch ne s'annulant jamais, cette dernière équation peut se résoudre sur $\mathbb{R}$. Il faut trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Ce quotient est de la forme $\frac{u'}{u}$, il a donc pour primitive $\ln(e^x + e^{-x})$, ou encore (elles ne diffèrent que d'une constante) $\ln(\mathrm{ch}(x))$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $y_h : x \mapsto K\,\mathrm{ch}(x)$. On va chercher une solution particulière à l'équation complète de la forme $y_p(x) = K(x)\,\mathrm{ch}(x)$, ce qui implique $y_p'(x) = K'(x)\,\mathrm{ch}(x) + K(x)\,\mathrm{sh}(x)$. La fonction est solution de l'équation si $K'(x)\,\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{sh}^3(x)}{\mathrm{ch}(x)}$, soit $K'(x) = \frac{\mathrm{sh}^3(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{(\mathrm{ch}^2(x) - 1)\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \mathrm{sh}(x) - \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$. On en déduit qu'on peut prendre $K(x) = \mathrm{ch}(x) - \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$, soit $y_p(x) = \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}(x)$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}(x) + K\,\mathrm{ch}(x)$. Une dernière série de courbes pour terminer en beauté l'exercice, de haut en bas les courbes correspondant à $K = 2$, $K = 1$, $K = 0$, $K = -1$, $K = -2$, $K = -3$ et $K = -5$:



Exercice 7 (*)

Sur les intervalles précisés, aucun problème : l'équation homogène $y' + \frac{y}{x} = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto e^{-\ln|x|} = \frac{K}{x}$ (quitte à changer le signe de K sur $\mathbb{R}^{-*}$), et on cherche y_p sous la forme $\frac{K(x)}{x}$. On obtient $y_p'(x) = \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$, d'où la condition $\frac{xK'(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$, soit $K(x) = \ln|x|$, donc les solutions générales sont de la forme $y(x) = \frac{K + \ln|x|}{x}$. Ces fonctions ne sont jamais prolongeables par continuité en 0, il n'y a donc pas de solution définie sur $\mathbb{R}$. Une allure de quelques courbes intégrales de cette équation (comme dans le premier exercice, rouge pour $K = 0$, bleu pour 1, vert pour 2, rose pour 5 et orange pour -2) :



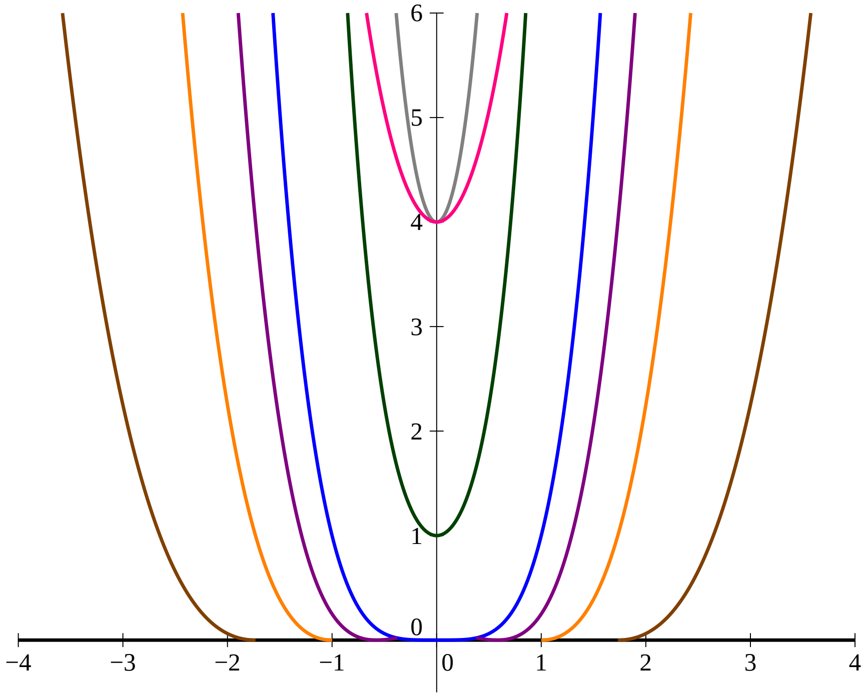
Exercice 8 (**)

Toutes les solutions sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, puisque le membre de droite de l'équation est dérivable. On peut par ailleurs écrire l'équation $f(x) = \sin(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$, et dériver pour obtenir $f'(x) = \cos(x) + 2e^x \times e^{-x} f(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$. En reprenantr l'équation initiale, on a donc $f'(x) = \cos(x) + 2f(x) + (f(x) - \sin(x))$, soit $f'(x) - 3f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. On est retombé sur une équation linéaire du premier ordre qu'on sait résoudre. L'équation homogène a pour solutions $y_h : x \mapsto Ke^{3x}$, et on peut chercher une solution particulière de la forme $y_p(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$, ce qui donne $y_p'(x) = a\cos(x) - b\sin(x)$. La fonction y_p est donc solution si $(a - 3b)\cos(x) - (b + 3a)\sin(x) = \cos(x) - \sin(x)$, ce qui fonctionne si $a - 3b = 1$ et $b + 3a = 1$, soit $b = -\frac{1}{5}$ et $a = \frac{2}{5}$. On peut donc prendre $y_p(x) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x)$, ce qui donne comme solutions de l'équation complète les fonctions $f(x) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x) + Ke^{3x}$. Le travail n'est pas fini car on a obtenu simplement les fonctions f dont la dérivée vérifie une condition nécessaire pour être solutions du problème initial. Il faut donc vérifier par exemple que $f(0)$ prend la valeur donnée par l'équation initiale pour que nos solutions soient valables. Ici, on doit avoir $f(0) = \sin(0) + \int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt = 0$, donc $K + \frac{2}{5} = 0$. Cela impose la valeur $K = -\frac{2}{5}$, soit $f(x) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}e^{3x}$. On vérifie si on le souhaite que cette fonction est effectivement solution, et c'est donc la seule.

Exercice 9 (**)

Posons donc $z = \sqrt{y}$ (ce qui est possible car y doit être à valeurs positives pour pouvoir satisfaire l'équation), on a alors $y = z^2$, donc $y' = 2zz'$, d'où $2(1+t^2)zz' = 4tz^2 + 4tz$. On doit donc avoir, pour les points où z ne s'annule pas, $2(1+t^2)z' - 4tz = 4t$. Il y a une solution particulière évidente à cette équation qui est la fonction constante égale à -1, et l'équation homogène associée $z' - \dfrac{2t}{1+t^2}z = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto Ke^{\ln(1+t^2)} = K(1+t^2)$, donc on obtient $z(t) = K(1+t^2)-1$, ce qui implique logiquement $y(t) = (K(1+t^2)-1)^2$. Mais attention, avec le changement de fonction effectué au départ, non seulement il ne faut pas que z s'annule, mais pas non plus que z prenne des valeurs négatives. On constate que $z(t) = 0$ si $t^2 = \dfrac{1-K}{K}$ (si $K = 0$, z est toujours négative, il n'y a pas de solution correspondante pour y). Si $K \notin]0,1]$, pas de problème, z et y ne s'annulent jamais et on obtient donc des solutions définies sur $\mathbb{R}$. Il existe d'ailleurs une autre solution définie partout, la solution nulle. Regardons maintenant les cas où les fonctions n'annulent. Commençons par le cas particulier $K = 1$, où $z(t) = t^2$, et donc $y(t) = t^4$. Cette fonction s'annule une seule fois, pour $t = 0$, et elle est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ tout entier (on le vérifie facilement, la dérivée en 0 étant nulle). Si $0 < K < 1$, z s'annule pour $x = \pm\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}$, et l'équation initiale devient pour les valeurs où y s'annule $(1+t^2)y' = 0$, donc la dérivée de y doit s'annuler à ces endroits pour que la fonction y reste solution. Or, $y'(t) = 2z(t)z'(t)$ s'annule toujours aux endroits où y s'annule. Les solutions sont donc en fait valables sur $\left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}\right]$ et sur $\left[\dfrac{\sqrt{1-K}}{K}, +\infty\right[$. On peut même prolonger ces deux morceaux en une fonction dérivable et solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ tout entier, en les prolongeant par la fonction nulle sur l'intervalle $\left[-\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}, \sqrt{\dfrac{1-K}{K}}\right]$ (à chaque fois, la dérivée de y s'annule aux points de recollement, il n'y a donc pas de problème). En fait, on peut même faire des choses encore plus bizarres : $y(t) = (K(1+t^2)-1)^2$ sur $\left]-\infty; -\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}\right]$, puis $y(t) = 0$ sur $\left[-\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}; \sqrt{\dfrac{1-L}{L}}\right]$, et enfin $y(t) = (L(1+t^2)-1)^2$ sur $\left[\sqrt{\dfrac{1-L}{L}}; \right[$. On peut vérifier assez facilement que les valeurs $\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}$ sont toujours différentes quand K varie entre 0 et 1, on a donc obtenu toutes les solutions possibles.

Regardons tout cela sur un petit graphique. En noir la solution nulle, en bleu $K = 1$ (celle qui s'annule uniquement en 0), en vert $K = 2$, en rose $K = -1$, en gris $K = 3$ (solutions ne s'annulant pas) ; en orange $K = \dfrac{1}{2}$, en marron $K = \dfrac{1}{4}$ et en violet $K = \dfrac{3}{4}$. On peut ainsi, comme décrit plus haut, construire une solution sur $\mathbb{R}$ en prenant le morceau de gauche de la courbe marron (jusqu'à la valeur d'annulation négative), en mettant un morceau de solution noire (donc égale à 0) jusqu'à atteindre la deuxième valeur d'annulation de la solution orange, et on finit avec le morceau de droite de la courbe orange. En jetant un oeil aux solutions qui ne s'annulent pas, on voit qu'il y a d'autres recollements possibles en 0. En effet, toutes les solutions ont une dérivée nulle en 0, et celles correspondant à des fonctions z prenant des valeurs opposées auront la même valeur en 0 (à cause du passage au carré). Pour chaque valeur de K supérieure à 1 correspondra une valeu de K négative pour lesquelles on pourra recoller en 0. Ainsi, par exemple, la fonction correspondant à $K = -1$ (courbe rose) sur $\mathbb{R}^-$ et $K = 3$ (courbe grise) sur $\mathbb{R}^+$ est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation.



Exercice 10 (**)

Posons donc $z = \dfrac{1}{y}$, on a alors $y = \dfrac{1}{z}$, donc $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$, ce qui nous donne l'équation $-\dfrac{3z'}{z^2}+\dfrac{3}{z}+\dfrac{1}{z^2} = 0$, soit en mettant tout au même dénominateur et en simplifiant par z : $3z' - 3z = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ke^t, et la fonction constante égale à $-\dfrac{1}{3}$ est solution particulière évidente, donc $z(t) = Ke^t - \dfrac{1}{3}$. Ces fonctions ne s'annulent pas lorsque $K \leqslant 0$ (elles sont alors toujours négatives), ce qui donnent des solutions définies sur $\mathbb{R}$ pour l'équation initiale de la forme $y(t) = \dfrac{1}{Ke^t - \frac{1}{3}}$, où $K \in \mathbb{R}^-$. On pourrait s'intéresser au recollement des solutions qui s'annulent avec la solution nulle, mais comme ce n'est pas demandé, pourquoi se fatiguer ?

Exercice 11 (**)

En posant $u = \dfrac{y'}{y}$, on a $u' = \dfrac{y''y - y'^2}{y^2}$, donc l'équation devient $y^2(u'\sin^2(x) + 1) = 0$. La fonction y n'ayant pas trop le droit de s'annuler pour que notre changement de variable soit valable, on a $u'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\dfrac{\cos^2(x)}{\tan^2(x)}$, donc $u(x) = \dfrac{1}{\tan x} + K$ (vous pouvez ajouer cette primite à votre tableau de primitives usuelles si vous le souhaitez). Revenons à notre changement de variable : $y' - uy = 0$, donc $y' - \left(\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} + K\right) y = 0$. L'équation est homogène, il suffit de trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} + K$, on peut prendre $\ln|\sin(x)| + Kx$, et obtenir ainsi pour solutions de l'équation initiale les fonctions $y(x) = L|\sin(x)|e^{-Kx}$. Les plus courageux pourront se demander s'il y a des recollements possibles entre différentes valeurs des constantes K et L.

Exercice 12 (*)

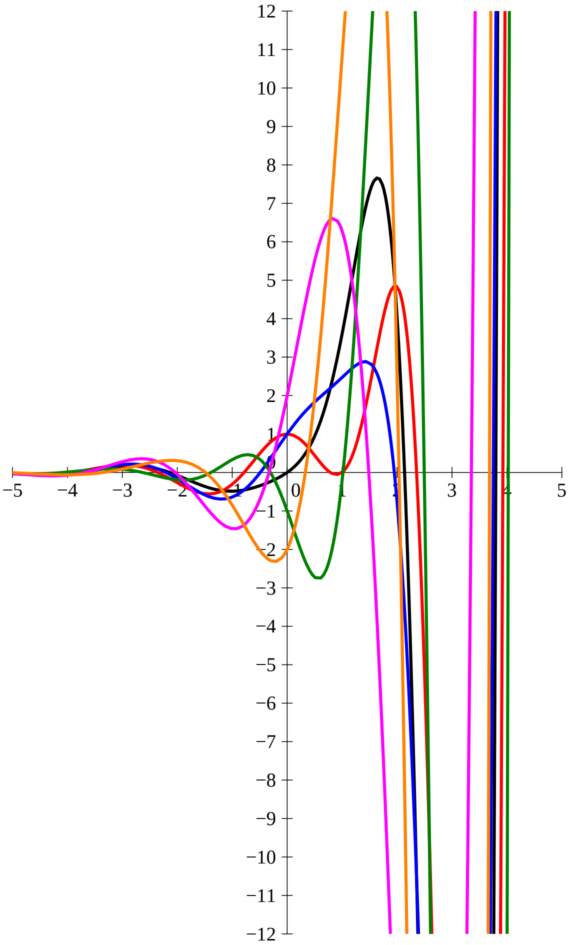
On devrait reconnaitre que la fonction y est la fonction tangente. Par la méthode d'Euler avec pas $\frac{1}{4}$, on a $y'(0) = 1$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = x$, donc $y\left(\frac{1}{4}\right) \simeq \frac{1}{4}$, puis $y'\left(\frac{1}{4}\right) \simeq \frac{17}{16}$ etc. En fait, en notant $u_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$, en prenant comme pas $\frac{1}{n}$, on a $u_{k+1} = \frac{1}{n}(u_k^2 + 1) + u_k$ (c'est une conséquence de la forme de l'équation différentielle). Pour $n = 4$, on a donc $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{17}{16}$, $u_4 \simeq 1.255$. Pour $n = 10$, on a $u_1 = \frac{1}{10}$, $u_2 = \frac{201}{1000}$ puis $u_{10} \simeq 1.396$. Sachant que $\tan 1 \simeq 1.557$, les approximations ne sont pas vraiment extrêmement satisfaisantes.

Exercice 13 (* à ***)

1. L'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ ayant pour solution $2i$ et $-2i$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto A\cos(2t) + B\sin(2t)$. On cherche une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, on a donc $y_p'' = 2a$, et y_p est solution si $4ax^2 + 4bx + 4c + 2a = x^2 - x + 1$, soit $a = \frac{1}{4}$; $4b = -1$ donc $b = -\frac{1}{4}$; et $4c + 2a = 1$ donc $c = \frac{1}{8}$. On obtient finalement comme solutions de l'équation complète les fonctions $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$.
2. L'équation caractéristique $r^2 + r = 0$ a pour solution 0 et 1, les solutions homogènes sont donc de la forme $y(x) = A + Be^{-x}$ (c'est une fausse équation du second ordre, on a en fait une équation du premier ordre en y'), il faut chercher une solution particulière de la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$, donc $y_p'(x) = (ax^2 + (2a + b)x + (b + c))e^x$, et $y_p''(x) = (ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b + c))e^x$. Cette fonction est solution si, après simplification par e^x, $2ax^2 + (6a + 2b)x + 2a + 3b + 2c = 4x^2$, ce qui nous donne $a = 2$; $6a + 2b = 0$ donc $b = -6$; et $2a + 3b + 2c = 0$ donc $c = 7$. On a donc des solutions générales de la forme $y(x) = A + Be^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)e^x$. Si on impose de plus $y(0) = A + B + 7 = e$ et $y'(0) = -B + 1 = 0$, on obtient $B = 1$ et $A = e - 8$, et la solution est bien unique.
3. L'équation homogène a pour équation caractéristique $r^2 + r + 2 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 1 - 8 = -7$, et les solutions $r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}$, et $r_1 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}$. Les solutions sont donc de la forme $y_h(x) = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}}$. Pour la solution particulière, on va chercher sous la forme $y_p(x) = (ax + b)e^x$, donc $y_p'(x) = (ax + a + b)e^x$ et $y_p''(x) = (ax+2a+b)e^x$, qui est solution si $4ax+3a+4b = 8x+1$, soit $a = 2$ et $b = -\frac{5}{4}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}} + \left(2x - \frac{5}{4}\right)e^x$.
4. Ici, l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ a pour solution -1 et 1, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$. Pour la solution particulière, utilisons le principe de superposition : comme $\text{sh}(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$, on va chercher une solution particulière avec second membre $\frac{e^x}{2}$, puis $\frac{e^{-x}}{2}$. Dans les deux cas, l'exposant de l'exponentielle est racine de l'équation caractéristique, il faut donc prendre un polynome de degré 1 en facteur. Posons donc $y_1(x) = (ax + b)e^x$, on a $y_1''(x) = (ax + 2a + b)e^x$, et y_1 est solution

pour $\dfrac{e^x}{2}$ si $a = \dfrac{1}{4}$ (et on prend par exemple $b = 0$) donc $y_1(x) = \dfrac{1}{4}xe^x$. De même, on obtient $y_2(x) = -\dfrac{1}{4}xe^{-x}$, donc en faisant la différence des deux, une solution particulière de l'équation complète est $y_p : x \mapsto \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{ch}(x)$. Finalement, nos solutions de l'équation complète sont les fonctions $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{ch}(x)$.

5. L'équation caractéristique a pour racines évidentes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $Ae^t + Be^{2t}$. Il faut chercher y_p de la forme $(at^3 + bt^2 + ct + d)e^t$ (un peu de courage !), donc $y_p'(t) = (at^3 + (3a + b)t^2 + (2b + c)t + c + d)e^t$ et $y_p''(t) = at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b + c)t + 2b + 2c + d)e^t$. Cette fonction est solution si $(a-3a+2a)t^3+(6a+b-9a-3b+2b)t^2+(6a+4b+c-6b-3c+2c)t+2b+2c+d-3c-3d+2d = -3t^2+10t-7$, soit $-3at^2+(6a-2b)t+2b-c = -3t^2+10t-7$. On obtient $a = 1$; $6a-2b = 10$ donc $b = -2$; et $2b - c = -7$ donc $c = 3$. Les solutions de l'équation complète sont de la forme $y(t) = (t^3 - 2t^2 + 3t + A)e^t + Be^{2t}$.
6. L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 5$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 20 = (4i)^2$ et pour racines $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto (A\cos(2t) + B\sin(2t))e^t$. Pour la solution particulière, on va en chercher une de l'équation $y'' - 2y' + 5y = 4e^te^{2it} = 4e^{(1+2i)t}$ sous la forme $y_p(t) = (at + b)e^{(1+2i)t}$. On a donc $y_p'(t) = ((a + 2ia)t + b + 2ib + a)e^{(1+2i)t}$ et $y_p''(t) = ((a + 4ia - 4a)t + b + 2ib + a + 2ib - 4b + 2ia + a + 2ia)e^{(1+2i)t}$. On a une solution si $(a + 4ia - 4a - 2a - 4ia + 5a)t - 3b + 4ib + 2a + 4ia - 2b - 4ib - 2a + 5b = 4$, soit $a = -i$ (quelle simplification spectaculaire !), donc une solution particulière est la fonction $y_p(t) = -ite^{(1+2i)t} = -ie^t(\cos(2t) + \sin(2t))$. Pour obtenir une solution particulière de notre équation initiale, il suffit de prendre la partie imaginaire de la précédente : $\widetilde{y_p}(t) = -t\cos(2t)e^t$. On obtient finalement pour solutions de l'équation complète $y(t) = ((A-t)\cos(2t)+B\sin(2t))e^t$. Je ne donne qu'un exemple de courbes intégrales pour cette dernière équation, avec deux constantes qui peuvent varier indépendemment, c'est beaucoup moins intéressant que dans le cas des équations du premier ordre, mais ça donne une vague idée des allures possibles :



Exercice 14 (**)

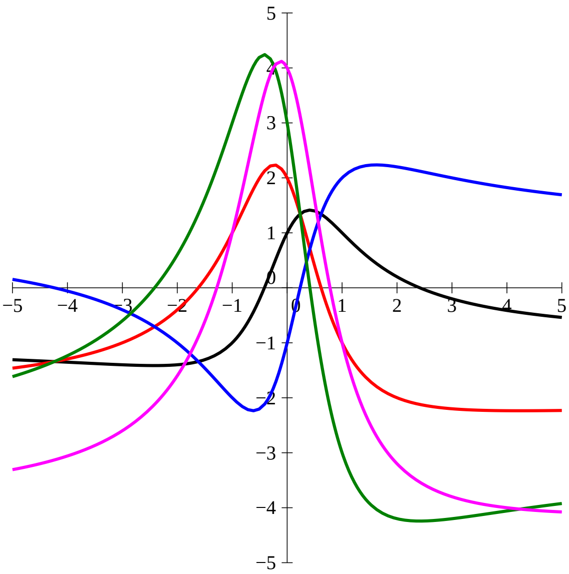
On pose donc $y(x) = z(\ln(x))$ (puisqu'on cherche des solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$, c'est toujours possible), d'où $y'(x) = \dfrac{1}{x}z'(\ln(x))$ et $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \dfrac{1}{x^2}z''(\ln(x))$. L'équation devient alors $-z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) + 3z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = \dfrac{1}{x^2}$, soit en posant $t = \ln(x)$, $z'' + 2z' + z = e^{-2t}$. L'équation caractéristique associée $r^2 + 2r + 1 = 0$ a pour racine double -1, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $z_h(t) = (A + Bt)e^{-t}$, et une solution particulière sera de la forme Ke^{-2t}, avec $4K - 4K + K = 1$, donc $K = 1$ convient, soit $z_p(t) = e^{-2t}$. On a donc comme solutions générales les fonctions $z(t) = (A + Bt)e^{-t} + e^{-2t}$, d'où on tire en remplaçant t par $\ln(x)$, $y(x) = \dfrac{A + B\ln x}{x} + \dfrac{1}{x^2}$. En imposant $y(1) = y'(1) = 0$, on a $A + 1 = -A + B - 2 = 0$, d'où $A = -1$ et $B = 1$. La seule fonction solution de ce problème est donc la fonction $x \mapsto \dfrac{x\ln x - x + 1}{x^2}$.

Exercice 15 (**)

Faisons donc ce que l'énoncé nous conseille, en posant $y(t) = z(t)e^{-t^2}$ (on peut toujours puisque e^{-t^2} ne s'annule jamais), on a alors $y'(t) = (z'(t) - 2tz(t))e^{-t^2}$, puis $y''(t) = (z''(t) - 2z(t) - 2tz'(t))e^{-t^2} - 2t(z'(t) - 2tz(t))e^{-t^2} = (z''(t) - 4tz'(t) + (4t^2 - 2)z(t))e^{-t^2}$. L'équation initiale devient alors, en supprimant le e^{-t^2} en facteur de tous les termes (et qui ne s'annule jamais), $z'' - 4tz' + (4t^2 - 2)z + 4tz' - 8t^2z + (11 + 4t^2)z = 0$, soit $z'' + 9z = 0$. Voilà une équation plus sympathique, dont l'équation caractéristique $r^2 + 9 = 0$ a pour solutions $3i$ et $-3i$. Les solutions sont donc de la forme $A\cos(3t)+B\sin(3t)$, dont on déduit les solutions de l'équation initiale : $y(t)=(A\cos(3t)+\sin(3t))e^{-t^2}$.

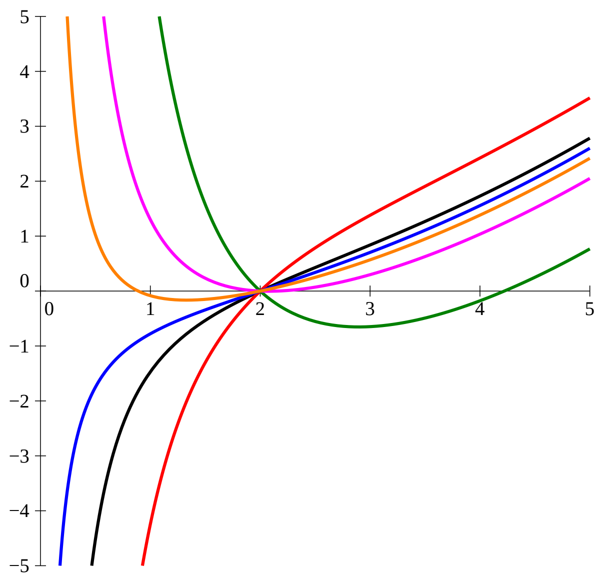
Exercice 16 (***)

1. L'indication de l'énoncé suppose qu'on travaille sur $\mathbb{R}^+$. De toute façon, la normalisation de l'équation obligera à enlever la valeur $x=0$. Posons donc $y(x)=z(\sqrt{x})$, ce qui donne $y'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}z'(\sqrt{x})$, puis $y''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}z'(\sqrt{x})+\dfrac{1}{4x}z''(\sqrt{x})$. L'équation initiale peut alors s'écrire $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}z'(\sqrt{x})+z''(\sqrt{x})+\dfrac{1}{\sqrt{x}}z'(\sqrt{x})-z(\sqrt{x})=0$, soit $z''(t)-z(t)=0$. Cette équation homogène a coefficients constants a pour équation caractérisrique $r^2-1=0$, et les fonctions solutions sont donc $z:t\mapsto Ae^t+Be^{-t}$. On en déduit que $y(x)=Ae^{\sqrt{x}}+Be^{-\sqrt{x}}$.
   Les plus courageux regarderont ce qui se passe sur $\mathbb{R}^{-*}$, où on pose cette fois $t=\sqrt{-x}$ et on obtient par un calcul très similaire à celui effectué ci-dessus $z''+z=0$, ce qui donne alors $y(x)=C\cos(\sqrt{-x})+D\sin(\sqrt{-x})$. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Oui, on peut recoller les deux types de solution quand $C=\dfrac{A+B}{2}$ (pour avoir la même valeur de y en 0), et $D=\dfrac{A-B}{2}$ (pour avoir la même dérivée en 0). En fait, on aura dans ce cas $y(x)=C\operatorname{ch}(x)+D\operatorname{sh}(x)$ sur $[0;+\infty[$.
2. On peut résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$ en posant $y(x)=z(\arctan(x))$, ce qui implique $y'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}z'(\arctan(x))$ puis $y''(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}z''(\arctan(x))-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}z'(\arctan(x))$. En remplaçant dans l'équation initiale, $z''(\arctan(x))-2xz'(\arctan(x))+2xz'(\arctan(x))+4z(\arctan(x))=0$, soit $z''(t)+4z(t)=0$. On résout sans difficulté l'équation caractéristique $r^2+4=0$ (solutions $2i$ et $-2i$) pour prouver que $z(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)$, donc $y(x)=A\cos(2\arctan(x))+B\sin(2\arctan(x))$. Quelques exemples de courbes intégrales de cette équation (encore une fois, ça n'a pas grand intérêt) :



3. Faisons donc : $y(x)=z(\ln(x))$ implique $y'(x)=\dfrac{1}{x}z'(\ln(x))$ puis $y''(x)=\dfrac{1}{x^2}z''(\ln(x))-\dfrac{1}{x^2}z'(\ln(x))$, donc en reportant dans l'équation initiale $z''(\ln(x))-z'(\ln(x))+3z'(\ln(x))+z(\ln(x))=x^2$, soit $z''(t)+2z'(t)+z(t)=e^{2t}$. L'équation caractéristique r^2+2r+1 admet -1 comme racine double donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z_h:t\mapsto$

$(A + Bt)e^{-t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $z_p(t) = Ke^{2t}$. On aura alors $z_p'(t) = 2Ke^{2t}$, puis $z''(t) = 4Ke^{2t}$, donc on veut $4K + 4K + K = 1$, soit $K = \frac{1}{9}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $z : t \mapsto (A + Bt)e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}$. On retrouve alors $y(x) = \frac{A + B\ln(x)}{x} + \frac{1}{9}x^2$. Pour changer un peu, essayons de tracer les courbes intégrales correspondant aux solutions prenant une valeur particulière, par exemple $y(2) = 0$, ce qui implique $\frac{A + B\ln(2)}{2} + \frac{4}{9} = 0$, soit $A = -\frac{8}{9} - B\ln(2)$. On obtient ce genre de courbes :



Exercice 17 (***)

Comme $f'(x) = 2f(-x) + x$, f' est elle-même dérivable, et f est deux fois dérivable. Dérivons donc l'équation, on obtient $f''(x) = -2f'(-x)+1 = -2(2f(x)-x)+1 = -4f(x)+2x+1$. La fonction f est donc solution de l'équation différentille $f'' + 4f = 2x + 1$, qui se résout sans difficulté : les solutions homogènes sont de la forme $A\cos(2x) + B\sin(2x)$ et une solution particulière évidente est la fonction $x \mapsto \frac{2x + 1}{4}$, donc $f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$. Reste à vérifier si les fonctions obtenues sont effectivement solutions du problème posé (la dérivation a transformé notre équation en une équation qui n'a aucune raison d'être équivalente). Avec la formule obtenue pour f, on calcule $f'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \frac{1}{2}$, puis $f'(x) - 2f(-x) - x = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \frac{1}{2} - 2A\cos(2x) + 2B\sin(2x) + x - \frac{1}{2} - x = 2(B - A)(\cos(2x) - \sin(2x))$. Si on veut que f soit solution du problème initial, il faut que cette expression s'annule, ce qui ne sera le cas que si $B = A$. Les solutions au problème posé sont donc les fonctions de la forme $f(x) = A(\cos(2x) + \sin(2x)) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

Exercice 18 (***)

Commençons par remarquer qu'en prenant $x = y = 0$, on a $2f(0) = 2f(0)^2$, donc $f(0)$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Mais si $f(0) = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = 0$, $2f(x) = 0$, donc f est la fonction nulle. Pour la suite, on peut supposer que $f(0) = 1$. Fixons désormais y et dérivons par rapport à x, on obtient $f'(x + y) + f'(x - y) = 2f(y)f'(x)$, puis en dérivant à nouveau $f''(x + y) + f''(x - y) = 2f(y)f''(x)$. De même, en dérivant deux fois par rapport à y, on obtient $f''(x + y) + f''(x - y) = 2f(x)f''(y)$ (il y a deux changement de signe qui se compensent quand on dérive deux fois $f(x-y)$). Puisque le membre de gauche est le même dans les deux équations, on en déduit que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$, soit en posant $y=0$, $f''(x) = Kf(x)$, avec $K = f''(0)$.

Si $K=0$, les solutions possibles sont de la forme $f(x) = ax+b$, avec $b=1$ puisque $f(0)=1$. Pour vérifier l'équationn fonctionnelle, on doit alors avoir $a(x+y)+1+a(x-y)+1 = 2(ay+1)(ax+1)$, soit $2(ax+1) = 2(a^2xy+ax+ay+1)$. Cette équation est vérifiée si $ax(ay+1)=0$ quelles que soient les valeursz de x et y, ce qui impose manifestement $a=0$. On trouve donc comme solution possible la fonction constante égale à 1.

Si $K>0$, l'équation $f'' = Kf$ a pour équation caractéristique $r^2-K=0$, qui a deux solutions réelles $\pm\sqrt{K}$, f est alors de la forme $Ae^{Lx}+Be^{-Lx}$, où $L=\sqrt{K}>0$. La condition $f(0)=1$ impose $A+B=1$, et l'équation fonctionnelle devient $Ae^{Lx+Ly}+Be^{-Lx-Ly}+Ae^{Lx-Ly}+Be^{-Lx+Ly} = 2(Ae^{Lx}+Be^{-Lx})(Ae^{Ly}+Be^{-Ly}) = 2(A^2e^{Lx+Ly}+ABe^{Lx-Ly}+ABe^{-Lx+Ly}+B^2e^{-Lx-Ly})$. Cela fonctionne bien si $2A^2=A$, $2AB=A=B$ et $2B^2=B$, ce qui donne $A=B=\dfrac{1}{2}$ (seule possibilité compatible avec $A+B=1$). On obtient alors $f(x) = \dfrac{e^{Lx}+e^{-Lx}}{2} = \mathrm{ch}(Lx) = \mathrm{ch}(\sqrt{K}x)$.

Enfin, si $K<0$, l'équation caractéristique a pour solutions $i\sqrt{-K}$ et $-i\sqrt{-K}$, donc en notant $L=\sqrt{-K}$, on aura $f(x) = A\cos(Lx)+B\sin(Lx)$. La condition $f(0)=1$ impose immédiatement $A=1$, puis l'équation devient, en posant par exemple $y=0$ $2\cos(x)+2B\sin(x) = 2\cos(x)$, ce qui impose assez clairement $B=0$. On obtient une dernière famille de solutions de la forme $f(x) = \cos(Lx) = \cos(\sqrt{-K}x)$.

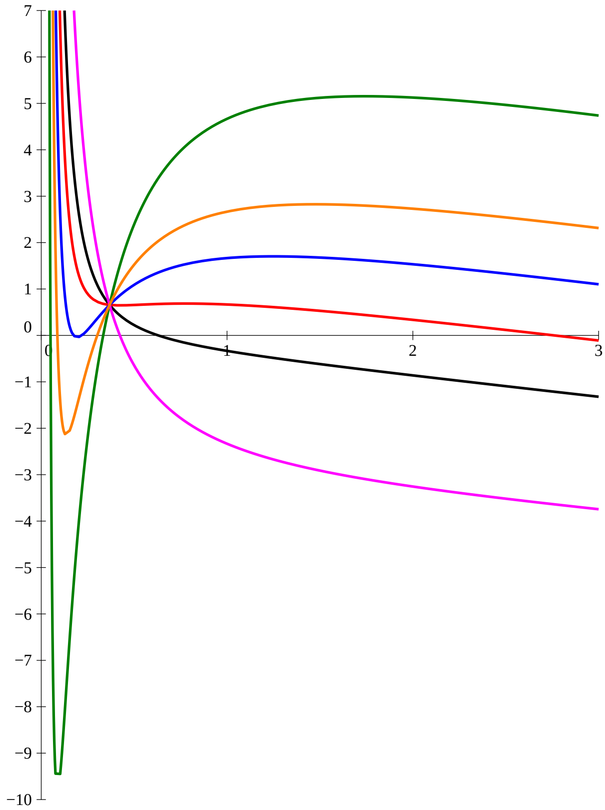
Exercice 19 (***)

1. Pour que f puisse vérifier l'équation de départ, il faut certainement qu'elle soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Réécrivons cette équation un peu différemment : $2f'(x) = \dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1$. Le membre de droite est obtenu comme produit et composée de fonctions dérivables, donc il constitue une fonction dérivable, ce qui prouve que f' est dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable.
2. Pour obtenir du second ordre, dérivons l'équation de départ : $-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x(2f'(x)+1) + 2x^2f''(x)$. Reste à exprimer le membre de gauche plus simplement. Pour cela, on reprend la relation obtenue dans la première question pour $2f'(x)$ et on l'applique à $\dfrac{1}{x}$ (attention à bien modifier également le $\dfrac{1}{x^2}$ à droite) : $2f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2f(x)-1$. On peut remplacer pour obtenir $-\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{x^2f(x)-1}{2} = 4xf'(x)+2x+2x^2f''(x)$, soit $-\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{2x^2} = 4xf'(x)+2x+2x^2f''(x)$. La fonction f est donc solution de l'équation linéaire $2x^2f''+4xf'+\dfrac{1}{2}f = \dfrac{1}{2x^2}-2x$.
3. Autrement dit, on pose $f(x) = g(\ln(x))$, ce qui est toujours possible sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut alors dériver deux fois : $f'(x) = \dfrac{1}{x}g'(\ln(x))$, puis $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}g''(\ln(x)) - \dfrac{1}{x^2}g'(\ln(x))$. Remettons tout ça dans l'équation obtenue à la question précédente : $2g''(\ln(x)) - 2g'(\ln(x)) + 4g'(\ln(x)) + \dfrac{1}{2}g(\ln(x)) = \dfrac{1}{2x^2} - 2x$. En posant $t=\ln(x)$, soit $x=e^t$, la fonction g est donc solution de l'équation à coefficients constants $2g''(t)+2g'(t)+\dfrac{1}{2}g(t) = \dfrac{1}{2}e^{-2t}-2e^t$.
4. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $2r^2+2r+\dfrac{1}{2}=0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4-4=0$, et admet donc pour racine double $r=-\dfrac{1}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $g_h : t \mapsto (A+Bt)e^{-\frac{t}{2}}$. Pour déterminer une

solution particulière de l'équation complète, utilisons le principe de superposition. On cherche d'abord une solution à l'équation $2g'' + 2g' + \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}e^{-2t}$ sous la forme $y_1(t) = ae^{-2t}$. Cela implique $y_1'(t) = -2ae^{-2t}$ et $y_1''(t) = 4ae^{-2t}$, donc y_1 est solution si $8ae^{-2t} - 4ae^{-2t} + \frac{a}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2}e^{-2t}$, soit $a = \frac{1}{9}$. De même, on cherche une solution à l'équation $2g'' + 2g' + \frac{1}{2}g = 2e^t$ sous la forme $y_2(t) = be^t$, avec cette fois la condition $2b + 2b + \frac{1}{2}b = 2$, donc $b = \frac{4}{9}$. Une solution particulière de l'équation est donc donnée par $g_p(t) = \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{4}{9}e^t$, et les solutions complètes de l'équation sont les fonctions $g : t \mapsto (A + Bt)e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{4}{9}e^t$.

5. En remontant le changement de variables effectué, on doit avoir $f(x) = g(\ln(x)) = \frac{A + B\ln(x)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9x^2} - \frac{4}{9}x$.
6. Comme on a travaillé uniquement par implications, il reste à vérifier si les fonctions obtenues sont vraiment solutions du problème. D'un côté, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}(A - B\ln(x)) + \frac{x^2}{9} - \frac{4}{9x}$; de l'autre $f'(x) = \frac{\frac{B}{\sqrt{x}} - \frac{A+B\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} - \frac{2}{9x^3} - \frac{4}{9} = \frac{2B - A - B\ln(x)}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{9x^3} - \frac{4}{9}$, donc $x^2(2f'(x)+1) = \sqrt{x}(2B - A - B\ln(x)) - \frac{4}{9x} - \frac{8}{9}x^2 + x^2 = \sqrt{x}(2B - A - B\ln(x)) - \frac{4}{9x} + \frac{x^2}{9}$. Les deux expressions coincident à l'unique condition que $2B - A = A$, soit $A = B$. Les fonctions solutions du problème initial sont donc toutes les fonctions $f : x \mapsto \frac{A(1 + \ln(x))}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9x^2} - \frac{4}{9}x$.

   Et même si ce n'était pas demandé, on peut tracer quelques allures de courbes, ici en noir la courbe correspondant à $A = 0$, en rouge $A = 1$, en bleu $A = 2$, en orange $A = 3$, en vert $A = 5$, en rose $A = -2$. Toutes les courbes passent par un point commun pour $x = \frac{1}{e}$ (puisqu'alors $1 + \ln(x) = 0$), d'ordonnée $\frac{e^2}{9} - \frac{4}{9e} \simeq 0.66$.



Problème 1 (***)

1. On sait que les solutions en question sont de la forme $Ce^x + De^{-x}$, avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$. On peut aussi les écrire $(C+D) \times \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + (C-D) \times \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Quitte à poser $A = C + D$ et $B = C - D$, ces solutions sont donc de la forme $A\,\mathrm{ch}(x) + B\,\mathrm{sh}(x)$. La réciproque se fait de la même façon.
2. La fonction z est certainement elle-même deux fois dérivable, et $z'(x) = -e^{-x}y + e^{-x}y' = e^{-x}(y'-y)$, puis $z''(x) = -e^{-x}(y'-y)+e^{-x}(y''-y') = e^{-x}(y''-2y'+y) = e^{-x}(y''-y)-2e^{-x}(y'-y)$ (c'est une façon peu naturelle d'écrire les choses mais c'est vrai ! En partant de l'hypothèse que $y'' - y = f(x)$, on a donc $z''(x) = e^{-x}f(x) - 2z'(x)$. La fonction z' est donc solution de l'équation différentielle du premier ordre $Z'+2Z = e^{-x}f(x)$ (en posant simplement $Z = z'$). La réciproque est évidente, les deux équations étant clairement équivalentes. Le second membre de notre équation étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, l'équation admet certainement des solutions, et (E) en admet donc aussi. De plus, il existe une unique solution à notre équation vérifiant $Z(0) = z'(0) = 0$ (problème de Cauchy du premier ordre), condition équivalente à l'égalité $y'(0) = y(0)$. Cette unique fonction Z admet elle-même une unique primitive s'annulant en 0, ce qui cette fois-ci est une condition équivalente à $y(0) = 0$. La fonction g définie par $g(x) = e^x z(x)$ est alors une solution vérifiant $g(0) = g'(0) = 0$, et c'est la seule puisque la construction assure l'unicité de la fonction z correspondante.
3. Posons donc dans un premier temps $f(x) = x^3 + x$, et tentons de résoudre l'équation $y'' - y = x^2 + x$ (passer par l'équation équivalente obtenue à la question précédente ne ferait que compliquer énormément le calcul alors qu'on sait très bien résoudre l'équation (E) dans ce cas). On connait déjà les solutions de l'équation homogène (question 1), reste à trouver une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On dérive deux fois pour trouver $y_p''(x) = 6ax + 2b$, donc y_p est solution si $-ax^3 - bx^2 + (6a - c)x + 2b - d = x^3 + x$. Par identification des coefficients, on trouve donc $a = -1$; $b = 0$; $6a - c = 1$ donc $c = -7$, et

$d = 0$, soit $y_p(x) = -x^3 - 7x$. Les solutions de l'équation complète sont alors de la forme $y(x) = A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x) - x^3 - 7x$. Les deux conditions imposées par notre problème de Cauchy sont $y(0) = 0$, soit $A = 0$; et $y'(0) = 0$, avec $y'(x) = A\operatorname{sh}(x) + B\operatorname{ch}(x) - 3x^2 - 7$, donc $B = 7$. Autrement dit, dans ce cas, $g(x) = 7\operatorname{sh}(x) - 3x^2 - 7x$.

Dans le cas où $f(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$, on peut procéder par superposition pour déterminer une solution particulière. La fonction constante $y_{p_1}(x) = -\frac{1}{2}$ est clairement solution de l'équation $y'' - y = \frac{1}{2}$. Cherchons ensuite une solution à l'équation $y'' - y = \frac{\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(e^{i2x}\right)$ en passant par une solution complexe y_c de l'équation $y'' - y = \frac{1}{2}e^{i2x}$. On peut imposer $y_c(x) = Ke^{i2x}$, puis calculer $y_c''(x) = -4Ke^{i2x}$, ce qui donne la condition $-4K - K = \frac{1}{2}$, soit $K = -\frac{1}{10}$. On a donc $y_c(x) = -\frac{1}{10}e^{i2x}$ puis, en reprenant la partie réelle, $y_{p_2}(x) = -\frac{1}{10}\cos(2x)$. Une solution particulière de notre équation complète est donc $y : x \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\cos(2x)$, et toutes les solutions sont données par les formules $y(x) = A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x) - \frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{2}$. Cette fois, la condition $y(0) = 0$ impose $A - \frac{1}{10} - \frac{1}{2} = 0$, soit $A = \frac{3}{5}$. Ensuite, $y'(x) = A\operatorname{sh}(x) + B\operatorname{ch}(x) + \frac{1}{5}\sin(2x)$, donc $y'(0) = B$, et on doit avoir $B = 0$. La deuxième fonction g recherchée est donc définie par $g(x) = \frac{3}{5}\operatorname{sh}(x) - \frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{2}$.

4. Calculons donc $h'(x) = g'(x) + g'(-x)$, puis $h''(x) = g''(x) - g''(-x)$. Bien entendu, g est supposée solution de (E), donc $g''(x) - g(x) = f(x)$. On peut alors écrire $h''(x) - h(x) = g''(x) - g(x) - (g''(-x) - g(-x)) = f(x) - f(-x) = 0$ puisque la fonction f est supposée paire. La fonction h est donc bien solution de l'équation homogène (H). On a $h(0) = g(0) - g(0) = 0$ et $h'(0) = g'(0) + g'(0) = 0$ puisque par définition $g'(0) = 0$. Or, on sait que h est de la forme $x \mapsto A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x)$, et la seule fonction de cette forme vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$ est la fonction nulle. On a donc $h(x) = 0$, soit $g(x) = g(-x)$, et la fonction g est bien paire.

5. Tentons subtilement dans ce cas de poser $h(x) = g(x) + g(-x)$, on aura alors $h'(x) = g'(x) - g'(-x)$ puis $h''(x) = g''(x) + g''(-x)$. Par hypothèse, $g''(x) - g(x) = f(x)$, et le même calcul que ci-dessus prouve que h reste solution de l'équation homogène (H) (on a cette fois $h''(x) - h(x) = f(x) + f(-x)$ qui est nul par hypothèse). De même, on prouve que la fonction h est nulle, et on en déduit que g est impaire.

6. (a) On calcule pour changer $v'(x) = u'(x+T) - u'(x)$ et $v''(x) = u''(x+T) - u''(x)$, et on en déduit que $v''(x) - v(x) = u''(x+T) - u(x+T) - (u''(x) - u(x)) = f(x+T) - f(x) = 0$ par hypothèse. La fonction v est donc solution de (H).

   (b) Comme dans les deux questions précédentes, $v(x) = A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x)$, donc $v(0) = A = u(T) - u(0)$, et $v'(0) = B = u'(T) - u'(0)$. On en déduit que $v(x) = (u(T) - u(0))\operatorname{ch}(x) + (u'(T) - u'(0))\operatorname{sh}(x)$.

   (c) Si u est T-périodique, alors u' aussi et on a donc clairement $u(T) = u(0)$ et $u'(T) = u'(0)$. La réciproque est à peine plus dure : si on suppose les deux conditions vérifiées, alors la fonction définie ci-dessus est nulle (il n'y qu'à regarder son expression !), ce qui prouve donc que $u(x+T) - u(x) = 0$, c'est-à-dire exactement que u est fonction T-périodique.

   (d) On sait très bien que toutes les solutions u de notre équation peuvent s'écrire sous la forme $u(x) = A\operatorname{ch}(x) + B\operatorname{sh}(x) + g(x)$ (puisque g est une solution particulière de l'équation). On a donc $u(0) = A$ et $u'(0) = B$ (puisque $g(0) = g'(0) = 0$), et $u(T) = A\operatorname{ch}(T) + B\operatorname{sh}(T) + g(T)$ et $u'(T) = A\operatorname{sh}(T) + B\operatorname{ch}(T) + g'(T)$. Notre solution est donc T-périodique si et seulement si $A\operatorname{ch}(T) + B\operatorname{sh}(T) + g(T) = A$ et $A\operatorname{sh}(T) + B\operatorname{ch}(T) + g'(T) = B$. Puisqu'on veut prouver que la solution périodique existe et est unique, il suffit donc de prouver que le système précédent admet une solution unique. On peut par exemple, en notant E_1 et E_2 ses deux équations, effectuer l'opération $(\mathrm{ch}(T)-1)\times E_1-\mathrm{sh}(T)\times E_2$ pour obtenir $A((\mathrm{ch}(T)-1)^2-\mathrm{sh}^2(T))+(\mathrm{ch}(T)-1)g(T)-\mathrm{sh}(T)g'(T)=0$. On trouve une unique valeur pour A à condition d'avoir $(\mathrm{ch}(T)-1)^2-\mathrm{sh}^2(T)\neq 0$, soit $1-2\,\mathrm{ch}(T)+1\neq 0$ en utilisant l'identité $\mathrm{ch}^2(T)-\mathrm{sh}^2(T)=1$. Or $2-2\,\mathrm{ch}(T)=0 \Leftrightarrow T=0$, ce qui est évidemment impossible. La constante A prend donc une valeur unique. On fait exactement le même raisonnement pour B en effectuant l'opération $\mathrm{sh}(T)\times E_1-(\mathrm{ch}(T)-1)\times E_2$, pour la même conclusion. La solution périodique u_0 est donc bien unique.

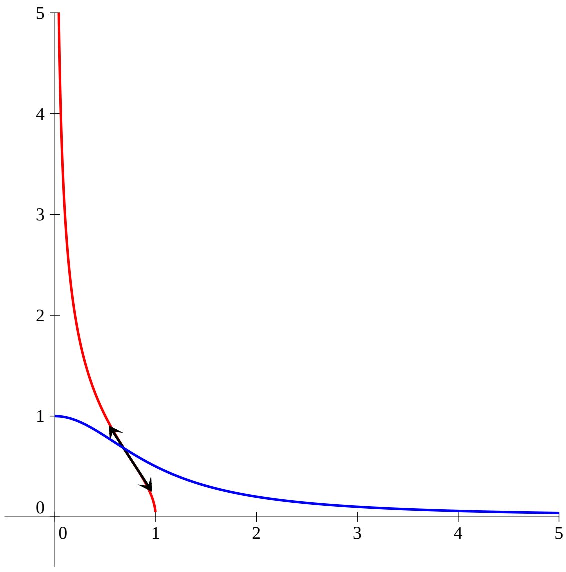
(e) Posons comme d'habitude $h : x\mapsto u_0(x)-u_0(-x)$, on a $h''(x)=u_0''(x)-u_0''(-x)=u_0(x)+f(x)-u_0(-x)-f(-x)$ puisque u_0 est solution de (E). Comme f est supposée paire, $h''(x)=h(x)$, et h est solution de l'équation (H). On a donc h qui s'exprime sous la forme $A\,\mathrm{ch}(x)+B\,\mathrm{sh}(x)$, mais qui est en même temps T-périodique puisque u_0 l'est. Ce n'est possible que si $A=B=0$, ce qui prouve que u_0 est une fonction paire.

(f) Dans le cas où $f(x)=\cos^2(x)$, la fonction f est π-périodique (puisque $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$, en élevant au carré, la différence de signe disparait). On a déterminé toutes les solutions de l'équation tout à l'heure, et la solution particulière $x\mapsto -\dfrac{1}{10}\cos(2x)$ est manifestement paire et π-périodique. Il s'agit donc de la solution u_0 (qui est de toute façon unique).

Problème 2 (***)

Première partie : Une étude de fonction.

1. La fonction f est définie si $\dfrac{1-x}{x}\geqslant 0$. Un petit tableau de signes donne $\mathcal{D}_f=]0;1]$ (attention à bien mettre les crochets dans le bon sens).
2. La fonction est dérivable sur $]0;1[$, de dérivée $f'(x)=\dfrac{\frac{-x-(1-x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}=-\dfrac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$. Cette dérivée étant toujours négative, la fonction f est strictement décroissante. Comme de plus $f(1)=0$, et $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, f est bijective de $]0;1]$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Cherchons à résoudre l'équation $f(x)=y$, soit $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=y$, on peut élever au carré pour obtenir $\dfrac{1-x}{x}=y^2$, soit $1-x=xy^2$, puis $x(y^2+1)=1$ et $x=\dfrac{1}{1+y^2}$. On a donc $g : y\mapsto \dfrac{1}{1+y^2}$, qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0;1]$ ($g(0)=1$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}g(y)=0$). Le théorème de la bijection nous assure que g est décroissante tout comme f.
4. Calculons donc (en reprenant la dernière expression de f') la dérivée seconde $f''(x)=\dfrac{4x\sqrt{\frac{1}{x}-1}-\frac{2x^2}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}}{4x^4(\frac{1}{x}-1)}=\dfrac{4x(\frac{1}{x}-1)-1}{4x^4(\frac{1}{x}-1)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3-4x}{4x^4(\frac{1}{x}-1)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée seconde est du signe de $3-4x$, et s'annule pour $x=\dfrac{3}{4}$. On calcule donc $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; et $f'\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{-1}{\frac{18}{16}\sqrt{\frac{1}{3}}}=-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$. L'équation de la tangente au point correspondant est donc $y=-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{16\sqrt{3}}{9}x+\sqrt{3}$.
5. Voici une allure, avec la tangente calculée à la question précédente (f en rouge, g en bleu) :



Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

1. La normalisation faisant apparaitre deux valeurs interdites, et le membre de droite n'est pas défini entre -1 (inclus) et 0, donc on résout séparément sur $]-\infty;-1[$; sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

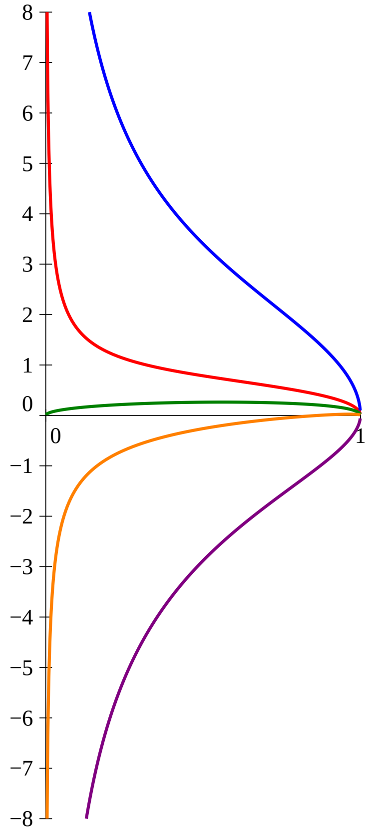
2. Mettons au même dénominateur le membre de droite : $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{1-x}=\dfrac{a-ax+bx}{x(1-x)}$. En identifiant, ceci est égal à $\dfrac{1}{2x(1-x)}$ si $a=\dfrac{1}{2}$ et $a-b=0$, soit $b=\dfrac{1}{2}$. On en déduit que $\dfrac{1}{2x(1-x)}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2(1-x)}$. L'équation homogène normalisée $y'+\dfrac{1}{2x(1-x)}y=0$ a donc pour solutions sur $]0;1[$ les fonctions $y_h : x\mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(1-x)}=K_1\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=K_1f(x)$. Sur $]1;+\infty[$, on obtient de même $y_h(x)=K_2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$; et sur $]-\infty;-1[$, $y_h(x)=K_3\sqrt{\dfrac{1-x}{-x}}=K_3\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$.

3. Effectuons par exemple le calcul sur $]0;1[$, on cherche donc $y_p(x)=K(x)f(x)$, d'où $y_p'(x)=K'(x)f(x)-\dfrac{K(x)}{2x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$. La fonction y_p est alors solution si $2x(1-x)K'(x)f(x)-\dfrac{\sqrt{x(1-x)}}{x}K(x)+K(x)f(x)=(1-x)\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$, donc $K'(x)=\dfrac{1}{2x}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. On en déduit que $K(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin(x)$ convient, ce qui donne pour solutions de l'équation complète les fonctions $y(x)=\left(\dfrac{1}{2}\arcsin(x)+K_1\right)\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$. De même, sur $]1;+\infty[$, on va trouver la condition $K'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$, ce qui correspond à la dérivée de la réciproque de la fonction sh que nous n'avons pas étudiée en cours (on peut tout de même réussir à trouver une expression explicite en étant motivés, je vous laisse vérifier que $K(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ convient). On a le même problème sur le dernier intervalle de résolution (même solution particulière au signe près). Il n'y évidemment pas de solution définie sur $\mathbb{R}$ puisque l'équation ne peut pas avoir de sens sur l'intervalle $]-1,0[$.

4. En $\dfrac{1}{2}$, on a $\arcsin(x)=\dfrac{\pi}{6}$, donc $y(x)=\dfrac{\pi}{12}+K_1$ (la racine carrée vaut simplement 1), il faut

donc choisir $K_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. On a alors $y(x) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{\pi}{6}\right)\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

5. Tout ce qu'on peut dire assez facilement, c'est que toutes les fonctions vont tendre vers 0 en 1, et auront une limite égale à $\pm\infty$ (selon le signe de K_1) si $K_1 \neq 0$. Ensuite, les problèmes de Cauchy dans $]0,1[$ ne pouvant avoir qu'une seule solution, les courbes ne peuvent pas se couper ailleurs que pour $x = 1$. On ne peut rien dire sur les variations de la fonction, mais la présence d'une tangente verticale en $x = 1$ est assurée si $K \geqslant 0$. À partir de ces maigres informations, si on trace des courbes relativement simples, on ne sera pas loin de la réalité (en rouge, la solution de la question précédente, en vert celle correspondant à $K = 0$, qui a une limite nulle en 0 mais c'est difficile à prouver) :



Une équation non linéaire.

1. Si y est constante, sa dérivée est nulle, donc elle vérifie $2y(1-y) = 0$, c'est-à-dire $y = 0$ ou $y = 1$.
2. Si y est à valeurs dans $]0;1[$, on aura toujours $2y(1-y) \geqslant 0$, donc pour vérifier l'équation on doit nécessairement avoir $xy' \leqslant 0$, d'où $y' \leqslant 0$ (puisque $x \in]0;1[$). La fonction y est donc décroissante.
3. Une fonction continue et monotone est toujours bijective, notons $z = y^{-1}$, on sait que $z'(t) = \frac{1}{y'(z(t))}$ (où on pose $t = y(x)$), ou encore $y'(z(t)) = \frac{1}{z'(t)}$, avec. En remplaçant x par $z(t)$ dans l'équation (F), on obtient $z(t)y'(z(t)) + 2z(t)(1-z(t)) = 0$, soit $\frac{z(t)}{z'(t)} + 2t(1-t) = 0$. On peut multiplier par $z'(t)$ pour trouver $z(t) + 2t(1-t)z'(t) = 0$. On reconnait bien l'équation annoncée.
4. La variable t ayant été supposée appartenir à $]0;1[$, on reprend les résultats de la partie

précédente : $z(t) = Kf(t) = K\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}$. On en déduit que $x = K\sqrt{\dfrac{1-y(x)}{y(x)}}$, soit $\dfrac{x^2}{K^2}y(x) = 1 - y(x)$, donc comme annoncé $y(x) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{K})^2}$. On peut toujours prendre une constante K strictement positive, puisque 0 est exclu, et K et $-K$ donnent la même fonction pour y. Les valeurs obtenues pour $y(x)$ sont manifestement positives, et tout aussi manifestement plus petites que 1 (puisque le dénominateur est strictement supérieur à 1), donc toutes les solutions trouvées conviennent.

5. Cette condition impose $1+\left(\dfrac{x_0}{K}\right)^2 = \dfrac{1}{\alpha}$, soit $\dfrac{x_0}{K} = \sqrt{\dfrac{1}{\alpha} - 1}$ (tout est positif), donc $K = \dfrac{x_0}{f(\alpha)}$.
6. Pour avoir une allure plus précise de la courbe, on va chercher les valeurs d'annulation de la dérivée seconde comme dans la première partie (pour les curieux, on appelle cela des points d'inflexion). Écrivons donc $y(x) = \dfrac{K^2}{K^2+x^2}$, et dérivons deux fois : $y'(x) = -\dfrac{2K^2x}{(K^2+x^2)^2}$ (les solutions sont donc décroissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$), et $f''(x) = \dfrac{-2K^2(K^2+x^2)^2 + 4x(K^2+x^2)(2K^2x)}{(K^2+x^2)^4} = \dfrac{-2K^4 - 2K^2x^2 + 8K^2x^2}{(K^2+x^2)^3} = \dfrac{2K^2(3x^2-K^2)}{(K^2+x^2)^3}$. Cette dérivée seconde s'annule si $x = \dfrac{K}{\sqrt{3}}$. Remarquons que $y\left(\dfrac{K}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3}{4}$, et $f'\left(\dfrac{K}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{9}{8K\sqrt{3}}$. Si on impose la condition $f(2) = \dfrac{1}{2}$, on trouve $K = \dfrac{2}{f(\frac{1}{2})} = 2$, donc le point d'annulation de la dérivée seconde est atteint pour $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et $f'\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{9}{16\sqrt{3}}$. On peut tracer la courbe suivante :