

# Feuille d'exercices n°6 : Équations différentielles

PTSI B Lycée Eiffel

19 octobre 2017

## Vrai-Faux

1. Toute fonction dérivable sur un intervalle  $y$  admet des primitives.
2. L'équation  $xy' + y = \cos(x)$  admet une unique solution  $y$  vérifiant  $y(0) = 0$ .
3. Les solutions de l'équation homogène  $y' + a(x)y = 0$  sont de la forme  $Ke^{A(x)}$ , où  $A$  est une primitive de  $a$ .
4. L'équation caractéristique de l'équation  $y'' + ay' + by = 0$  est  $r^2 + ar + b = 0$ .
5. Les solutions d'une équation du second ordre ayant un discriminant nul pour son équation caractéristique sont de la forme  $(A + B)e^{rx}$ .

## Exercice 1 (\* à \*\*)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^3}$
- $f(x) = \cos(x)\sin(x)$
- $f(x) = \arctan(x)$
- $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$
- $f(x) = x\sin^3(x)$
- $f(x) = x\sqrt{1+2x^2}$
- $f(x) = \frac{1}{x+x\ln^2(x)}$
- $f(x) = \operatorname{ch}(x)\cos(x)$
- $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x) = \ln(1+x^2)$
- $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

## Exercice 2 (\* à \*\*)

Calculer les intégrales suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $\int_0^1 (x-2)(x+1)^5 dx$
- $\int_1^e x^2(\ln x)^3 dx$
- $\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2} dx$
- $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$
- $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx$
- $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$
- $\int_0^{\ln(2)} \operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^2(x) dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$
- $\int_1^e x \ln^2(x) dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2(x) dx$
- $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$
- $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx$
- $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$
- $\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$
- $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}} dx$

### Exercice 3 (\*\* à \*\*\*)

Calculer les intégrales et primitives suivantes (en appliquant les quelques recettes vues en cours sur les fractions rationnelles) :

1.  $\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)} dx$
2.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)} dx$
3.  $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-4x+3} dx$
4.  $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx$
5.  $\int \arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) dx$

### Exercice 4 (\*\*)

On cherche à étudier la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$ . On pourra utiliser dans tout l'exercice le résultat classique suivant : si  $f(t) \leq g(t)$  pour tout réel  $t \in [a, b]$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ .

1. Calculer les premiers termes de la suite  $u_n$  (on s'arrête quand ça devient vraiment trop dur).
2. Déterminer la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ , en déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
4. Montrer que  $1 - u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)}{n} dt$ .
5. Montrer à l'aide d'une majoration de la fonction à l'intérieur de l'intégrale que  $0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \frac{1}{n+1}$ .
6. En déduire la limite de  $n(1 - u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 5 (\*\*\*)

Le but de ce dernier exercice est de calculer l'intégrale  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)} dx$ .

1. Démontrer que,  $\forall x > 0$ ,  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$  (on pourra par exemple passer par un calcul de dérivée).
2. On considère une fonction  $f$  définie et strictement monotone sur  $[0, a]$ , et vérifiant  $f(0) = 0$ , et on note  $g$  sa réciproque.
  - (a) On veut prouver que,  $\forall x \in [0, a]$ ,  $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(t) dt = xf(x)$ . Faire un dessin clair expliquant ce résultat à l'aide de calculs d'aires.
  - (b) Exprimer  $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(t) dt$  à l'aide de primitives  $F$  et  $G$  des fonctions  $f$  et  $g$ .
  - (c) Redémontrer rigoureusement la formule souhaitée.

3. On veut calculer dans cette question  $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$ .
- (a) Déterminer un polynôme  $P$  de degré 2 tel que  $x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)P(x)$ .
- (b) Effectuer la décomposition en éléments simples de  $\frac{x^2}{x^4 + 1}$ , sous la forme  $\frac{ax + b}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{cx + d}{P(x)}$ .
- (c) Calculer l'intégrale  $J$ , et mettre le résultat sous la forme la plus simple possible (en utilisant le résultat de la question 1).
4. Justifier que la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$  est bijective de  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  vers un intervalle à préciser, et donner l'expression de sa réciproque  $g$ .
5. Calculer  $\int_0^1 g(x) dx$  et appliquer le résultat de la question 2 pour en déduire la valeur de  $I$ .

### Exercice 6 (\* à \*\*)

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles de résolution choisis :

1.  $y' - 2y = \operatorname{sh}(x) - 2x \operatorname{ch}(x)$ .
2.  $ty' + y = \cos(t)$ .
3.  $y' + y = \frac{1}{1 + e^t}$ .
4.  $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$ .
5.  $xy' \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x$ .
6.  $y' + 2y = x^2$ .
7.  $y' + x^2y + x^2 = 0$ . Déterminer une solution vérifiant  $y(0) = 0$ .
8.  $\sqrt{1 - x^2}y' - y = 1$ .
9.  $2ty' + y = t^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
10.  $y' + y = \sin(x) + \sin(2x)$ .
11.  $y' - 3y = x^2e^x + xe^{3x}$  en imposant de plus  $y(0) = 1$ .
12.  $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}^3(x)$ .

### Exercice 7 (\*)

On cherche les solutions définies sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $x^2y' + xy = 1$ . Commencer par résoudre cette équation sur chacun des intervalles  $\mathbb{R}^{+*}$  et  $\mathbb{R}^{-*}$ . Conclure.

### Exercice 8 (\*\*)

Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(x) + 2 \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$ .

### Exercice 9 (\*\*)

Résoudre l'équation différentielle  $(1 + t^2)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$  (on pourra poser  $z = \sqrt{y}$  et chercher une équation différentielle plus ordinaire vérifiée par  $z$ ). Cette équation différentielle est un cas particulier d'équation de Bernoulli.

### Exercice 10 (\*\*)

Déterminer les fonctions  $y$  définies sur  $\mathbb{R}$ , ne s'annulant jamais et vérifiant  $y' + 3y + y^2 = 0$  (on pourra poser  $z = \frac{1}{y}$ ). Cette équation est un cas particulier d'équation de Riccati.

### Exercice 11 (\*\*)

Résoudre l'équation différentielle  $(yy'' - (y')^2) \sin^2 x + y^2 = 0$  (on pourra poser  $u = \frac{y'}{y}$ ).

### Exercice 12 (\*)

On considère l'équation différentielle  $y' = y^2 + 1$ , avec comme condition initiale  $y(0) = 0$ . Déterminer une valeur approchée de  $y(1)$  en utilisant la méthode d'Euler avec pas  $h = \frac{1}{4}$ , puis  $h = \frac{1}{10}$ . Comparez avec la valeur exacte (si, si, vous la connaissez). Qu'en pensez-vous ?

### Exercice 13 (\* à \*\*\*)

Résoudre les équations différentielles du deuxième ordre suivantes :

1.  $y'' + 4y = x^2 - x + 1$ .
2.  $y'' + y' = 4x^2 e^x$ , avec  $y(0) = e$  et  $y'(0) = 0$ .
3.  $y'' + y' + 2y = (8x + 1)e^x$ .
4.  $y'' - y = \text{sh}(x)$ .
5.  $y'' - 3y' + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$ .
6.  $y'' - 2y' + 5y = 4e^t \sin(2t)$ .

### Exercice 14 (\*\*)

On considère l'équation  $x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$ , qu'on cherche à résoudre sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . En posant  $z(x) = y(e^x)$ , déterminer une équation différentielle du second ordre à coefficients constants vérifiée par  $z$ . En déduire les solutions de l'équation initiale, et prouver qu'il en existe une seule vérifiant  $y(1) = y'(1) = 0$ . Ce type d'équation est appelé équation d'Euler.

### Exercice 15 (\*\*)

Résoudre l'équation différentielle  $y'' + 4ty' + (11 + 4t^2)y = 0$  en posant  $z(t) = e^{t^2}y(t)$ .

### Exercice 16 (\*\*\*)

Résoudre les équations suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

1.  $4xy'' + 2y' - y = 0$  (on posera  $t = \sqrt{x}$ ).
2.  $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + 4y = 0$  (on posera  $t = \arctan(x)$ ).
3.  $x^2 y'' + 3xy' + y = x^2$  (on posera  $t = \ln(x)$  et on résoudra seulement sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ).

### Exercice 17 (\*\*\*)

Déterminer l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x$ .

## Exercice 18 (\*\*\*)

Déterminer toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivables vérifiant  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) + f(x - y) = 2f(y)f(x)$  (utiliser une méthode proche de celle vue en cours pour la caractérisation des exponentielles, mais en dérivant deux fois).

## Exercice 19 (\*\*\*)

On cherche dans cet exercice toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(2f'(x) + 1)$ . On va pour cela raisonner par analyse et synthèse (c'est-à-dire qu'on va chercher à déterminer le plus de caractéristiques possibles des solutions du problème, de manière à leur donner une forme précise, et on vérifiera ensuite que les fonctions de cette forme sont effectivement solutions).

1. Soit donc  $f$  une telle fonction. Prouver que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
2. Déterminer une équation linéaire du second ordre vérifiée par  $f$ .
3. En posant  $g(t) = f(e^t)$ , déterminer une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont  $g$  est solution.
4. Résoudre cette équation.
5. En déduire les solutions possibles de l'équation de départ.
6. Conclure.

## Problème 1 (\*\*\*)

On cherche dans ce problème à étudier les équations différentielles de la forme  $y'' - y = f(x)$  (équation notée  $(E)$  dans la suite de l'exercice). On notera  $(H)$  l'équation homogène associée  $y'' - y = 0$ .

1. Montrer que l'ensemble des solutions de  $(H)$  est constitué des fonctions de la forme  $x \mapsto A \operatorname{ch}(x) + B \operatorname{sh}(x)$ , avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .
2. Soit  $y$  une fonction deux fois dérivable, on pose  $z(x) = e^{-x}y(x)$ . Montrer que  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $z'$  est solution d'une équation linéaire d'ordre 1 à préciser. En déduire qu'il existe (au moins) une solution à l'équation  $(E)$ , puis qu'il existe une unique solution  $g$  de l'équation  $(E)$  vérifiant  $g(0) = g'(0) = 0$ .
3. Résoudre l'équation  $(E)$  et déterminer la solution  $g$  lorsque  $f(x) = x^3 + x$ , puis lorsque  $f(x) = \cos^2(x)$ .
4. On suppose dans cette question que la fonction  $f$  est paire. Montrer que la fonction  $h : x \mapsto g(x) - g(-x)$  est solution de  $(H)$ . Calculer  $h(0)$  et  $h'(0)$  et en déduire que  $g$  est paire.
5. Que peut-on démontrer dans le cas où  $f$  est impaire ?
6. On suppose cette fois-ci que la fonction  $f$  est  $T$ -périodique, et on note  $u$  une solution de  $(E)$ .
  - (a) Montrer que  $v : x \mapsto u(x + T) - u(x)$  est solution de l'équation  $(H)$ .
  - (b) Exprimer  $v$  à l'aide des réels  $u(T) - u(0)$  et  $u'(T) - u'(0)$ , et des fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$ .
  - (c) Montrer que  $u$  est une fonction  $T$ -périodique si et seulement si  $u(T) = u(0)$  et  $u'(T) = u'(0)$ .
  - (d) En déduire qu'il existe une unique solution  $T$ -périodique à l'équation  $(E)$ . On la note  $u_0$ .
  - (e) Montrer que, si  $f$  est paire,  $u_0$  est aussi paire.
  - (f) Déterminer  $u_0$  dans le cas où  $f(x) = \cos^2(x)$ .

## Problème 2 (\*\*\*)

Le but de ce problème est d'étudier une équation du premier ordre non linéaire par une méthode originale : en prouvant que les réciproques des solutions sont elles-mêmes solutions d'une équation différentielle linéaire.

## Première partie : Une étude de fonction.

On considère dans cette partie la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $f$ , en déduire qu'elle est bijective de  $\mathcal{D}_f$  vers un intervalle à préciser.
3. Donner une expression simple de la réciproque  $g$  de la fonction  $f$ , ainsi que le tableau de variations de la fonction  $g$ .
4. Calculer la dérivée seconde  $f''$  de  $f$ , et calculer l'équation des tangentes éventuelles aux points d'annulation de  $f''$  (on admettra qu'en ces points, la position relative de la tangente et de la courbe change au point d'intersection).
5. Tracer soigneusement les allures des courbes représentatives de  $f$  et de  $g$  dans un même repère (en tenant notamment compte des calculs effectués à la question précédente).

## Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

On considère dans cette partie l'équation différentielle  $(E) : 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ .

1. Sur quels intervalles va-t-on résoudre l'équation  $(E)$  ?
2. Déterminer deux constantes  $a$  et  $b$  telles que  $\frac{1}{2x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$ , et en déduire les solutions de l'équation homogène associée à  $(E)$ .
3. Déterminer une solution particulière de  $(E)$  à l'aide de la méthode de variation de la constante, et en déduire les solutions de l'équation complète. Existe-t-il des solutions définies sur  $\mathbb{R}$  ?
4. Déterminer l'unique solution définie sur  $]0; 1[$  et vérifiant  $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ .
5. Tracer une allure de cette solution, ainsi que de quelques autres solutions définies sur  $]0; 1[$  (on ne demande pas une étude détaillée de toutes les fonctions, mais une explication rapide de l'allure des courbes), dans un même repère.

## Une équation non linéaire.

On va désormais s'intéresser à l'équation non linéaire  $(F) : xy' + 2y(1-y) = 0$ , qu'on cherche à résoudre sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

1. Déterminer les fonctions constantes solutions de l'équation  $(F)$ .
2. Pour tout la suite, on cherchera à décrire les solutions de l'équation à valeurs dans  $]0; 1[$ . Montrer que ces solutions sont nécessairement décroissantes.
3. En déduire qu'elles sont bijectives, et que leurs réciproques sont solutions de l'équation homogène associée à  $(E)$ .
4. En déduire que les solutions cherchées sont de la forme  $y(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{k}\right)^2}$ , où  $k$  est une constante strictement positive. Quelles sont les valeurs de  $k$  convenables (pour lesquelles  $y$  est effectivement à valeurs dans  $]0; 1[$ ) ?
5. Montrer que, si on fixe une valeur de  $x_0$  strictement positive, et un réel  $\alpha \in ]0; 1[$ , il existe une unique solution parmi les précédentes vérifiant  $y(x_0) = \alpha$ .
6. Tracer une allure soignée de la courbe de la solution vérifiant  $y(2) = \frac{1}{2}$ .