Feuille d'exercices n°11 : Dérivation

PTSI B Lycée Eiffel

23 janvier 2018

Vrai-Faux

1. Une fonction continue sur un intervalle y est nécessairement dérivable.
2. Une fonction dérivable f admet un extremum en a si et seulement si $f'(a) = 0$.
3. Si f est dérivable sur le segment $[a, b]$, il existe une valeur de f' sur ce segment égale à $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
4. Une fonction strictement croissante sur un intervalle I (et dérivable) y a forcément une dérivée strictement positive.
5. Un suite récurrente convergente a une limite qui vérifie nécessairement $f(l) = l$.

Exercice 1 (* à **)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et étudier l'existence de tangentes (éventuellement verticales) aux points posant problème. On essaiera également, lorsque c'est possible, d'étudier les variations de la fonction et d'en tracer une allure de courbe représentative.

- $f_1(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$
- $f_2(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
- $f_3(x) = (x^2 - 1)\arccos(x^2)$
- $f_4(x) = \sqrt{x}e^{-x}$
- $f_5(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$
- $f_6(x) = xe^{\frac{1}{\ln(x)}}$
- $f_7(x) = x\sqrt{x + x^2}$
- $f_8(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$
- $f_n(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 2 (**)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{2n}$. Calculer la dérivée n-ème de f de deux façons différentes (directement, et à l'aide de la formule de Leibniz en écrivant f sous forme de produit), puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 3 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. À quelle condition la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$ est-elle dérivable en a ? Donner dans ce cas l'expression de $g'(a)$.

Exercice 4 (**)

Soit $f : [0; a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0; a[$.
2. En déduire que la courbe de f admet une tangente passant par l'origine autre que celle en 0.

Exercice 5 (***)

Soit f la fonction définie (et $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, où P_n est un polynôme dont on précisera le degré. on donnera également une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.
2. Calculer P_1, P_2 et P_3, et déterminer leur racines (si possible).
3. En appliquant la formule de Leibniz à l'égalité $(1+x^2)f(x) = 1$, montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$.
4. En déduire que $P'_n(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.
5. Les polynômes P_n peuvent-ils avoir des racines réelles multiples ?

Exercice 6 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x^2)^n$, où n est un entier naturel non nul. Montrer que $f^{(n)}$ est un polynôme de degré n admettant exactement n racines simples réelles comprises entre -1 et 1 (une récurrence pourrait être utile, mais pas forcément sur l'entier n).

Exercice 7 (**)

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$. Montrer qu'il existe $x \in]a;b[$ tel que $f'(x)(g(b)-g(a)) = g'(x)(f(b)-f(a))$.
2. En déduire la règle de l'Hôpital : Si f et g s'annulent toutes les deux en un point a, sont continues et dérivables au voisinage de a (sauf éventuellement en a pour la dérivabilité), ne s'annulent pas au voisinage de a, et vérifient $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.
3. En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 8 (***)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)(1-f(x)f(y)) = f(x)+f(y)$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} = f'(0)$.
3. Montrer qu'il existe deux constantes a et b telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(f(x)) = ax+b$.
4. En déduire que f est constante, et conclure.

Exercice 9 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2-u_n^2)$.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2-x^2)$. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall x \in [1;2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et que $f([1;2]) \subset [1;2]$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.

4. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$?

Exercice 10 (**)

On considère la fonction f définie sur $\left]0; \dfrac{1}{e}\right[\cup \left]\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x + 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudiez les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Déterminer les points fixes de f.
4. On définit une suite (x_n) par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Étudiez sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$, en déduire que $\forall x \in]1; +\infty[$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$, puis que $|x_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 11 (***)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition. Quelle est sa parité ?
2. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, et que son prolongement est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Préciser les valeurs de $f'(0)$ et $f''(0)$.
3. Résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$, on note α sa solution. Vérifier que $\alpha \in]0; 1[$ et calculer $\operatorname{ch}(\alpha)$.
4. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $\operatorname{ch}(t) - t$, puis prouver que $\forall t \geqslant 0$, $0 \leqslant t\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t) \leqslant \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}^2(t)$.
5. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer la nature de la suite (u_n).

Problème 1 (***)

Le but de ce problème est d'étudier numériquement les solutions d'équations du type
$x^n + x^{n-1} + \cdots + x = a$.

1. **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0$.
   On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
   (a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine dans l'intervalle $]0; 1[$ et préciser la valeur de cette racine, qu'on notera désormais r_2.
   (b) Montrer que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, $f(x) \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.
   (c) Calculer la dérivée f' de f et prouver que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.
   (d) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$, et en déduire la convergence de (u_n).

2. **Résolution numérique de l'équation** $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.
On considère désormais la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

(a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une unique solution r_3 appartenant à $]0;1[$.

(b) Montrer que l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$ est stable par g.

(c) Calculer les dérivées g' et g'' et déterminer le maximum de $|g'(x)|$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$.

(d) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Majorer $|v_n - r_3|$ en fonction de n, et prouver la convergence de (v_n) vers r_3.

3. **Racine positive de l'équation** $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$.
On désigne désormais par a un réel strictement positif, et on note, pour tout entier $n \geqslant 2$, h_n la fonction définie par $h_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a$.

(a) Montrer que sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ possède une unique racine qu'on notera t_n, puis que $t_n \in]0;1[$ si $n > a$.

(b) Montrer que $(x-1)h_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

(c) Montrer que $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$, et en déduire que la suite (t_n) est strictement décroissante, puis qu'elle converge vers une limite qu'on notera désormais α.

(d) Montrer que, si $A \in \mathbb{N}$, on aura $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$ si $n \geqslant A$. En déduire, en choisissant $A > a$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n^n = 0$.

(e) Exprimer la limite α en fonction de a.

4. **Racine positive de l'équation** $nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0$.
On note dans cette partie $i_n(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x - a$.

(a) Montrer que l'équation $i_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $]0;+\infty[$, et que cette solution appartient à l'intervalle $]0;1[$ si $n(n+1) > 2a$. On notera cette solution y_n.

(b) Prouver la relation $(x-1)^2 i_n(x) = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - a(x-1)^2$.

(c) Montrer que $i_{n+1}(y_n) > i_n(y_n)$. En déduire la décroissance de la suite (y_n), et sa convergence vers un réel $\beta \in [0;1[$.

(d) Montrer que $0 \leqslant n y_n^n \leqslant n y_A^n$ dès que $n \geqslant A$, où $A(A+1) \geqslant 2a$. En déduire la limite de la suite $(n y_n^n)$, puis déterminer β en fonction de a.

Problème 2 (**)

On donne pour ce problème les valeurs numériques suivantes : $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$; $\dfrac{3}{2e} \simeq 0,55$; $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(2)^2 \simeq 0,5$.

I. Une première étude de fonction

On définit la fonction i sur $]0;+\infty[$ par $i(x) = x^2 + x - 2 - x^2\ln(x)$.

1. Calculer la dérivée i' de la fonction i ainsi que sa dérivée seconde i''.
2. Montrer que la fonction i est prolongeable par continuité en 0. La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer les valeurs d'annulation de i''. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de i aux points correspondants.
4. Montrer que i' s'annule en une unique valeur α. Montrer que $\alpha > 1$.
5. En déduire le tableau de variations de i, et montrer que i s'annule deux fois sur $]0;+\infty[$: en 1 et en une valeur β qu'on ne cherchera pas à déterminer.
6. Tracer une allure soignée de la courbe de i en exploitant tous les calculs effectués dans cette première partie (on donne $\alpha \simeq 2$ et $\beta \simeq 3$).

II. Une deuxième étude de fonction

On définit désormais une fonction f par $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer qu'on peut la prolonger par continuité en 1.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $g(x) = \ln(x) - \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2}$.
4. En admettant que $\ln(x) \underset{x\to 1}{=} x - 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0$, montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.
5. Calculer $g'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $h(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.
6. En constatant que $h(1) = h(-2) = 0$, factoriser h et en déduire le tableau de variations de g.
7. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution autre que 1, que l'on notera λ (mais qu'on ne sait pas calculer). En déduire le tableau de variations de f (on donne $f(\lambda) \simeq 2,9$).