Feuille d'exercices n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 septembre 2017

Exercice 1 (**)

- $f(x) = 0$ n'aura pas de solution si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.
- f est constante se traduit par exemple par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = f(y)$; ou par $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a$. Notez que $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y)$ marche aussi (alors que ça semble moins fort que la première proposition).
- tout réel a (au moins) un antécédent par f si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a$.
- f ne prend pas de valeur négative si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ (ça, c'est assez facile !).
- tout réel a (au moins) deux antécédents par f si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y) = a$ (il est essentiel que x et y soient distincts).
- f ne prend jamais deux fois la même valeur : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq f(y)$. On peut également proposer $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exercice 2 (** à ***)

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 2$: FAUX, 1 est un des nombreux contre-exemples évidents.
2. $\exists n \in \mathbb{N}$, $2 < n < 4$: VRAI, l'entier 3 convient (et c'est d'ailleurs le seul).
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant x$: FAUX, ça ne marche pas si $x \in]0;1[$, par exemple $x = 0.5$.
4. $\forall x > 0$, $\exists y > 0$, $y < x$: VRAI (en admettant que x et y sont des réels), on peut toujours prendre par exemple $y = \dfrac{x}{2}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $p = 2n$: VRAI, on ne voit pas bien ce qui pourrait nous empêcher de multiplier un entier naturel par 2, et le résultat sera toujours un entier naturel.
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n = 2p$: FAUX, ce n'est vrai que si n est pair.
7. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) = 2p$: VRAI, cela revient à dire que $n(n+1)$ est toujours pair. En effet, parmi n et $n+1$, l'un des deux nombres est pair et l'autre impair, on obtient donc un nombre pair en faisant leur produit.
8. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y^2$: VRAI, pour le coup, tous les x strictement négatifs sont des exemples.
9. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y > 0$, $y = \ln(x)$: FAUX, la fonction ln n'est même pas définie sur $\mathbb{R}$, et même quand elle est définie, $\ln(x)$ n'est pas toujours strictement positif.
10. Comme c'est écrit, c'est faux, puisque je n'ai pas précisé que $y > x$, ce qui pose problème dans l'encadrement final. Toutefois, en remplaçant $\forall y \neq x$ par $\forall y > x$, l'énoncé est vrai mais pas évident à prouver. Il existe nécessairement un entier n pour lequel $\dfrac{1}{n} < y - x$, puisque $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et $y - x > 0$. Notons alors p le plus grand entier naturel (dans le cas où x et y sont positifs) pour lequel $\dfrac{k}{n} \leqslant x$. Un tel entier existe cette fois-ci car $\dfrac{k}{n}$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. Par définition de k, $\dfrac{k+1}{n} > x$, mais on ne peut pas avoir $\dfrac{k+1}{n} > y$, sinon les inégalités $\dfrac{k}{n} < x < y < \dfrac{k+1}{n}$ impliqueraient $\dfrac{1}{n} > y - x$. Le nombre rationnel $\dfrac{k+1}{n}$ est donc strictement compris entre x et y.

Exercice 3 (*)

C'est extrêmement mécanique et peu palpitant :

- $\exists x \in \mathbb{R},\ x < 2$
- $\forall x \in \mathbb{N},\ x \in]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < x$
- $\exists x > 0,\ \forall y > 0,\ x \leqslant y$
- $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p \neq 2n$
- $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n \neq 2p$
- $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n(n+1) \neq 2p$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 \leqslant x$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ y \neq \ln(x)$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \neq x,\ \forall z \in \mathbb{Q},\ z \leqslant x$ ou $z \geqslant y$

Exercice 4 (*)

La première équivalence est vraie, les deux propositions signifiant que f est g sont toutes les deux égales à la fonction nulle. Par contre, la deuxième équivalence est complètement fausse : l'énoncé de droite signifie que soit f soit g est la fonction nulle, alors que celui de gauche stipule juste que soit $f(x)$ soit $g(x)$ (mais pas forcément toujours la même fonction) s'annule pour chaque valeur de x. L'énoncé de droite implique bien sûr celui de gauche mais la réciproque n'est pas vraie. Si on prend par exemple la fonction f qui est nulle quand $x \leqslant 0$ et telle que $f(x) = x^2$ si $x \geqslant 0$ (une telle fonction est accessoirement continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et g la fonction qui vérifie au contraire $g(x) = x^2$ si $x \leqslant 0$ et $g(x) = 0$ si $x \geqslant 0$, alors les fonctions f et g vérifient l'énoncé de gauche (pour tout réel x, soit on a $f(x) = 0$ soit $g(x) = 0$) mais pas celui de droite.

Exercice 5 (*)

- $A = (3x+1)^4 = ((3x+1)^2)^2 = (9x^2+6x+1)^2 = 81x^4 + 36x^2 + 1 + 108x^3 + 18x^2 + 12x = 81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1$
- $B = 2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x-3)^2$
- $C = 4x^2 - 16 = (2x+4)(2x-4) = 4(x+2)(x-2)$
- $D = (2x-6)(x+2) - (x+1)(x-3) + 2x(3-x) = (x-3)(2(x+2) - (x+1) - 2x) = (x-3)(-x+3) = -(x-3)^2$
- $E = (2x+1)^3 + (2x+1)^2 + 2x + 1 = (2x+1)((2x+1)^2 + 2x + 1 + 1) = (2x+1)(4x^2 + 6x + 3)$

Exercice 6 (*)

1. $A = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$
2. $B = 2\sqrt{2} - \sqrt{6} + 10\sqrt{3} - 15$ (ne peut pas se simplifier davantage).
3. $C = \dfrac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}} = \dfrac{3\sqrt{2^3 \times 3^2}}{2\sqrt{2 \times 3^4}} = \dfrac{2 \times 3^2 \times \sqrt{2}}{2 \times 3^2\sqrt{2}} = 1$
4. $D = \dfrac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100} = \dfrac{2^5 \times 5^2 \times 3^{-4} \times 2^2 \times 3^2}{3^8 \times 3 \times 5 \times 2^2 \times 5^2} = \dfrac{2^5}{3^{11} \times 5}$
5. $E = \dfrac{24}{36} - \dfrac{15}{36} + \dfrac{4}{36} - \dfrac{30}{36} = -\dfrac{17}{36}$
6. $F = \dfrac{1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{7}{6}}{2} = \dfrac{7}{12}$
7. Calculons plutôt $G^2 = (\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}})^2 = 4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})} + 4 + 2\sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{16 - 12} = 8 - 4 = 4$. Il suffit de faire attention au fait que $G < 0$ (la racine de

gauche est clairement inférieure à celle de droite) pour conclure que $G = -2$ (ce qui ne saute pas vraiment aux yeux initialement).

Exercice 7 (*)

- Commençons par constater que $|x| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 5$, donc $B = [-5; 5]$.
- Sans difficulté, $A \cup B = [4; 7] \cup [-5; 5] = [-5; 7]$.
- L'ensemble $A \cap C$ est constitué des nombres entiers naturels appartenant à A, donc $A \cap C = \{4; 5; 6; 7\}$.
- Un exemple élémentaire de complémentaire, on fait attention au sens des crochets : $\mathbb{R} \backslash B = \mathbb{R} \backslash [-5; 5] =]-\infty; -5[\cup]5; +\infty[$.
- Pour déterminer $A \cap \overline{C}$, il faut enlever dans l'ensemble A tous les nombres qui appartiennent à C, c'est-à-dire qui sont des entiers naturels : $A \cap \overline{C} =]4; 5[\cup]5; 6[\cup]6; 7[$
- L'ensemble $(A \cup B) \cap C$ est contitué des entiers relatifs appartenant à $A \cup B$, ensemble calculé plus haut, donc $(A \cup B) \cap C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
- $A \cup (B \cap C) = [4; 7] \cup \{0; 1; 2; 3\}$ (inutile d'inclure les entiers 4 et 5 dans le deuxième ensemble puisque ceux-ci sont déjà inclus dans le premier intervalle).
- $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap C) =]-\infty; -5[\cup]7; +\infty[\cup \{0; 1; 2; 3\}$ (inutile d'inclure une deuxième fois les entiers strictement plus grands que 7).

Exercice 8 (***)

1. La relation de parallélisme est réflexive (une droite est parallèle à elle-même), et transitive (si d et d' d'un coté, et d' et d'' de l'autre sont parallèles, alors d et d'' sont parallèles), mais pas antisymétrique. Au contraire, la relation est symétrique : si d est parallèle à d', alors d' est automatiquement parallèle à d. La relation de parallélisme est en fait ce qu'on appelle une relation d'équivalence.
2. La relation d'inclusion est réflexive, transitive (si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$), et antisymétrique puisque $E \subset F$ et $F \subset E$ implique bien $E = F$. Il s'agit donc d'une relation d'ordre, qui n'est pas le moins du monde totale (par exemple, si $E = [0; 1]$ et $F = [2; 3]$, on n'a ni $E \subset F$ ni $F \subset E$). Le plus grand élément pour cette relation est $\mathbb{R}$, le plus petit est $\emptyset$.
3. La relation R est sûrement réflexive puisque $a^a \leqslant a^a$. Elle n'est par contre pas transitive : par exemple $7R2$ puisque $7^2 = 49 < 2^7 = 128$; $2R3$ puisque $2^3 = 8 < 3^2 = 9$, mais on n'a pas $3^7 < 7^3$ (en effet, $3^7 = 2\ 187$ et $7^3 = 343$). Elle n'est pas non plus antisymétrique : $2R4$ et $4R2$ sont tous les deux vérifiés puisque $2^4 = 16 = 4^2$. Il y a un plus petit élément tout de même pour cette relation puisque $1Rb$ est vérifié quel que soit l'entier b. Il y a également un plus grand élément qui est 3 (cf plus bas). Si on enlève les cas particulier 1 et 2, on peut en fait prouver que la relation R coïncide avec la relation $\geqslant$ (et qu'il s'agit donc d'une relation d'ordre dont le plus grand élément est toujours 3 mais qui ne possède plus de plus petit élément). En effet, aRb est équivalent à $b \ln(a) \leqslant a \ln(b)$. Si on pose $f_a(x) = a \ln(x) - x \ln(a)$, la fonction a pour dérivée $\dfrac{a}{x} - \ln(a)$, qui s'annule en $x = \dfrac{a}{\ln(a)}$. La fonction est donc croissante puis décroissante. Or, elle s'annule certainement en $x = a$, avec $a > \dfrac{a}{\ln(a)}$ puisque a est supposé supérieur à 3. On a donc $f_a(x) < 0$ si $x > a$, et en particulier bRa si $b > a$. Sur l'intervalle $[3; a]$, la fonction f_a est croissante puis décroissante, reste à vérifier le signe de $f_a(3)$. Or, $f_a(3) = a \ln(3) - 3 \ln(a) = -f_3(a)$, donc on vient d'expliquer que c'était nécessairement positif si $a \geqslant 3$. La fonction f_a est donc positive sur $[3, a]$, et cela prouve que aRb si $b \leqslant a$. Notre relation est donc bien une relation d'ordre total (assez élémentaire qui plus est !).
4. La relation R est certainement réflexive, transitive (si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour tout réel alors $f(x) \leqslant h(x)$), mais également antisymétrique (en effet si $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant f(x)$, alors

$f(x) = g(x)$ et cette relation est vraie pour tous les réels). C'est donc une relation d'ordre. Ce n'est pas du tout une relation d'ordre total, si on prend par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, on ne peut pas les comparer à l'aide de la relation R (si $x < 0$, $f(x) < g(x)$, mais si $x > 0$, $g(x) < f(x)$). Il n'y a pas non plus de plus grand élément (une fonction ne peut pas être supérieure à toutes les fonctions constantes, encore moins à toutes les fonctions tout court) ni de plus petit élément.

5. La relation R est réflexive (puisque $|0| \leqslant 0$), mais aussi transitive (si $|x' - x| \leqslant y' - y$ et $|x'' - x'| \leqslant y'' - y'$, alors par inégalité triangulaire $|x'' - x| \leqslant |x'' - x'| + |x' - x| \leqslant y'' - y' + y' - y \leqslant y'' - y$) et antisymétrique : si $|x' - x| \leqslant y' - y$ et $|x - x'| \leqslant y - y'$, alors on a nécessairement $y - y' = 0$ (sinon l'un des deux membres de droite des inégalités précédentes est strictement négatif, et une valeur absolue ne peut pas lui être inférieure !), puis $|x - x'| = 0$, soit $x = x'$. Les deux couples coïncident donc. La relation d'ordre n'est pas totale, par exemple $(0, 0)$ et $(1, 0)$ ne sont pas comparables puisqu'on a alors $y - y' = y' - y = 0$, mais $|x - x'| = 1$. Il n'y a pas de plus grand ni de plus petit élément pour R (pour un couple fixé, on peut par exemple toujours trouver un autre couple tel que $y - y' < 0$ qui ne peut donc pas être plus grand). Un plus grand élément pour le disque trigonométrique serait nécessairement le point du disque ayant la plus grande ordonnée (pour que le membre de droite dans la relation R ne soit jamais strictement négatif, sinon on ne peut plus comparer avec un autre élément du disque), à savoir le point $(0, 1)$. Mais ce point n'est pas plus grand que tous les autres du disque trigo, par exemple $(0,6; 0,6)$ est un point du disque trigonométrique, mais $|0,6 - 0| > 1 - 0,6$. On peut par contre trouver une borne supérieure, en l'occurence le couple $(0, \sqrt{2})$.

Exercice 9 (* à ***)

1. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$, et $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$, donc $\mathcal{S} = \{2; 3\}$.
2. On constate que 1 est racine de ce polynome puisque $2 - 4 + 3 - 1 = 0$. On peut donc factoriser par $x - 1$: $(2x^3 - 4x^2 + 3x - 1) = (x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$. Par identification, on obtient $a = 2$, $b = -2$ et $c = 1$, donc $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = (x - 1)(2x^2 - 2x + 1)$. Cherchons les racines de ce dernier trinome, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$. Il n'y a donc pas de racines réelles, et concernant l'équation initiale, $\mathcal{S} = \{1\}$.
3. Posons $X = \sqrt{x}$ (en notant au passage que l'équation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$). L'équation devient alors $X^2 = X + 2$, soit $X^2 - X - 2 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $X_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Cette dernière solution est à exclure. Comme on a, par définition de X, $x = X^2$, on obtient donc $\mathcal{S} = \{4\}$.
4. $x^3 + 5x^2 \leqslant 6x \Leftrightarrow x(x^2 + 5x - 6) \leqslant 0$. Dans le but de faire un tableau de signe, cherchons les racines de la parenthèse, qui a pour discriminant $\Delta = 25 + 4 \times 6 = 49$, donc admet deux racines réelles $x_1 + \dfrac{-5-7}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x		-6		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x^2 + 5x - 6$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x^3 + 5x^2 - 6$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On en conclut que $\mathcal{S} =]-\infty; -6] \cup [0; 1[$

5. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x - 3 - (x^2 - 4)}{x^2 - 4} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4} > 0$. Le dénominateur a pour racines

-2 et 2. Quant au numérateur, il a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. D'où le tableau de signes suivant :

x		-2		$1-\sqrt{2}$		2		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{x^2-2x-1}{x^2-4}$	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$

Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]1-\sqrt{2}; 2[\cup]1+\sqrt{2}; +\infty[$.

6. Commençons déjà par éliminer un cas très particulier où l'équation n'est pas une équation du second degré : si $m = 1$, l'équation devient $2x + 2 = 0$, qui a pour solution unique $x = -1$. Pour toutes les autres valeurs de m, on peut calculer le discriminant $\Delta = 4(m-2)^2 - 4(m-1)(m+1) = 4(m^2 - 4m + 4 - m^2 + 1) = 4(5-4m)$. Ce discriminant est nul lorsque $m = \dfrac{5}{4}$, auquel cas l'équation admet pour solution unique $x = \dfrac{2(m-2)}{2(m-1)} = \dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = -3$. Si $m < \dfrac{5}{4}$ (mais différent de 1), le discriminant est positif, et l'équation admet deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{2(m-2) + 2\sqrt{5-4m}}{2(m-1)} = \dfrac{m-2+\sqrt{5-4m}}{m-1}$ et $x_2 = \dfrac{m-2-\sqrt{5-4m}}{m-1}$. De même, si $m > \dfrac{5}{4}$, le discriminant est strictement négatif et on a cette fois deux racines complexes $x_1 = \dfrac{m-2+i\sqrt{4m-5}}{m-1}$ et $x_2 = \dfrac{m-2-i\sqrt{4m-5}}{m-1}$.

Exercice 10 (**)

Pour comparer deux nombres, la méthode la plus simple consiste à prouver que leur différence est positive (ou négative). Commençons donc par calculer $y - m = y - \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{y-x}{2} \geqslant 0$ puisqu'on a supposé que $x \leqslant y$. Tous les nombres étant clairement positifs, on peut aussi comparer leurs carrés : $m^2 - g^2 = \dfrac{x^2+2xy+y^2}{4} - xy = \dfrac{x^2-2xy+y^2}{4} = \dfrac{(x-y)^2}{4} \geqslant 0$, donc $m^2 \geqslant g^2$, ce qui prouve que $m \geqslant g$. Même méthode pour le suivant : $g^2 - h^2 = xy - \dfrac{4x^2y^2}{(x+y)^2} = xy\left(1 - \dfrac{4xy}{(x+y)^2}\right) = \dfrac{xy(x^2+y^2+2xy-4xy)}{(x+y)^2} = \dfrac{xy(x-y)^2}{(x+y)^2} \geqslant 0$, et on conclut de même. Reste la dernière inégalité : $h - x = \dfrac{2xy}{x+y} - x = \dfrac{2xy - x^2 - xy}{x+y} = \dfrac{x(y-x)}{x+y} \geqslant 0$, ça marche à nouveau.

Exercice 11 (***)

- Comme $2 \leqslant 2x \leqslant 8$ et $-15 \leqslant -3y \leqslant -6$, on obtient $-12 \leqslant 2x - 3y + 1 \leqslant 3$.
- Comme $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $-1 \leqslant y - 3 \leqslant 2$, on obtient $-4 \leqslant x(y-3) \leqslant 8$ (séparez les cas suivant le signe de y si vous n'êtes pas sûrs de vous pour ce genre de cas). On aurait aussi pu dire que $x(y-3) = xy - 3x$, or $2 \leqslant xy \leqslant 20$ et $-12 \leqslant -3x \leqslant -4$, mais on obtient alors $-10 \leqslant x(y-3) \leqslant 16$, ce qui est un encadrement nettement moins précis que le précédent.
- Comme $-3 < z < 3$; $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{z}{2} < \dfrac{3}{2}$.
- Comme $3 \leqslant 3x \leqslant 12$ et $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{y+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$, on obtient $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{3x}{y+1} \leqslant 4$.
- Comme $-5 < z - 2 < 1$, on obtient $\dfrac{1}{z-2} < -\dfrac{1}{5}$ ou $\dfrac{1}{z-2} > 1$ (on est obligés de distinguer deux cas suivant le signe de z).

- On peut bien sûr encadrer $x^2 - 4x + 4$ terme par terme (ce qui donne finalement $-11 \leqslant x^2 - 4x + 4 \leqslant 16$), mais il est beaucoup plus efficace de constater que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Comme $-1 \leqslant x - 2 \leqslant 2$, on a alors $0 \leqslant x^2 - 4x + 4 \leqslant 4$.
- Comme $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{y-1} \leqslant 1$ et $-7 < z - 4 < -1 \Rightarrow -28 < x(z-4) < -1$, on obtient $-28 < \frac{x(z-4)}{y-1} < -\frac{1}{4}$.
- On a $2 \leqslant xy \leqslant 20$, donc $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant 2\sqrt{5}$, et $-1 < 2 - z < 5$, donc $-3e^5 < -3e^{2-z} < -\frac{3}{e}$, d'où finalement $\sqrt{2} - 3e^5 < \sqrt{xy} - 3e^{2-z} < 2\sqrt{5} - \frac{3}{e}$.

Exercice 12 (* à **)

1. $|x-3| \geqslant 5$ signifie que $x - 3 \geqslant 5$ ou $x - 3 \leqslant -5$, d'où $\mathcal{S} =]-\infty; -2] \cup [8; +\infty[$.
2. $|2x-4| = |3x+2| \leftrightarrow 2x - 4 = 3x + 2$ ou $2x - 4 = -3x - 2$ soit $-x = 6$ ou $5x = 2$, et $\mathcal{S} = \left\{-6; \frac{2}{5}\right\}$
3. $|x^2 - 8x + 11| = 4$ revient à dire que $x^2 - 8x + 11 = 4$ ou $x^2 - 8x + 11 = -4$. Il ne reste plus qu'à résoudre ces deux équations du second degré. La première a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 7 = 36$, et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{8-6}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{8+6}{2} = 7$. La deuxième a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 15 = 4$, et admet deux racines réelles $x_3 = \frac{8-2}{2} = 3$ et $x_4 = \frac{8+2}{2} = 5$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1; 3; 5; 7\}$.
4. Pas besoin de se fatiguer pour celle-là, le membre de gauche étant manifestement positif (c'et une somme de deux valeurs absolues), il ne sera jamais strictement inférieur à -2, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
5. Il n'y a pas de méthodes fiables pour s'en sortir par le calcul, le mieux est donc d'écrire l'inéquation sous la forme $|x-2| - |4x+2| \geqslant 0$, et de faire un « tableau de signes »pour simplifier le membre de gauche :

x	$-\infty$ $\quad -\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$ 0	$x-2$
$\lvert 4x+2\rvert$	$-4x-2$ 0	$4x+2$	$4x+2$
$\lvert x-2\rvert - \lvert 4x+2\rvert$	$3x+4$	$-5x$	$-3x-4$

   Comme $3x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{4}{3}$, les réels de l'intervalle $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right]$ sont solutions de l'équation initiale (on ne garde bien sûr que les valeurs de x appartenant à l'intervalle sur lequel l'expression $3x + 4$ est valide). De même, on a $-5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$, donc l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ est aussi solution. Enfin, $-3x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{4}{3}$, ce qui n'ajoute pas de solutions. En regroupant le tout, on obtient donc $\mathcal{S} = \left[-\frac{4}{3}; 0\right]$.
6. Ici, difficile d'être tenté de faire quoi que ce soit d'autre qu'un tableau :

x	$-\infty$ $\quad \frac{3}{2}$	3	7	$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$	$-2x+3$ 0	$2x-3$	$2x-3$	$2x-3$
$\lvert 3-x\rvert$	$3-x$	$3-x$ 0	$-3+x$	$-3+x$
$\lvert x-7\rvert$	$-x+7$	$-x+7$	$-x+7$ 0	$x-7$
$\lvert 2x-3\rvert + \lvert 3-x\rvert - \lvert x-7\rvert$	$-2x-1$	$2x-7$	$4x-13$	$2x+1$

Ne restent plus qu'à résoudre pas moins de quatre équations, et à vérifier si les solutions obtenus appartiennent au bon intervalle à chaque fois : $-2x-1=2 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$, solution acceptable ; $2x-7=2 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$, solution rejetée ; $4x-13=2 \Leftrightarrow x=\frac{15}{4}$, solution acceptable ; $2x+1=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, solution rejetée. Bilan : $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2};\frac{15}{4}\right\}$.

7. $|e^x-3|<1 \Leftrightarrow -1<e^x-3<1 \Leftrightarrow 2<e^x<4 \Leftrightarrow \ln 2<x<\ln 4$, donc $\mathcal{S}=]\ln 2;\ln 4[$.
8. On peut commencer par constater que le second membre doit être positif pour que l'équation puisse avoir une solution, et donc résoudre uniquement sur $[5;+\infty[$. On a alors, en élevant au carré (tout est positif) $|x^2-1|=(x-5)^2$, soit $x^2-1=x^2-10x+25$ (la valeur absolue à gauche est superflue, ce qui est à l'intérieur est positif sur notre intervalle d'étude). Reste la très simple équation $10x=26$, dont la solution n'appartient pas à notre intervalle d'étude, d'où $\mathcal{S}=\emptyset$.
9. Le dénominateur à gauche ne s'annulant jamais, l'équation est équivalente à $x^2-x-2=k(x^2-2x+3)$, ou encore $(k-1)x^2-(2k-1)x+3k+2$. Signalons déjà que l'équation ne peut pas avoir deux solutions si $k=1$ (elle n'est pas du second degré), et calculons pour les autres valeurs de k le discriminant $\Delta=(2k-1)^2-4(k-1)(3k+2)=4k^2-4k+1-4(3k^2-k-2)=-8k^2+9$. Il faut que ce discriminant soit strictement positif, donc que $k^2<\frac{9}{8}$, soit $k\in\left]-\frac{3}{2\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}\right[$. Ensuite, reste à vérifier si les deux racines sont positives pour ces valeurs de k. Une façon de faire est de constater que deux nombres réels sont positifs si et seulement si leur produit est positif (ils sont alors forcément de même signe) et leur somme également. Or, si les réels x_1 et x_2 sont solutions de l'équation ax^2+bx+c, leur produit est égal à $\frac{c}{a}$ et leur somme à $-\frac{b}{a}$ (en effet, en développant $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$, on doit retomber au facteur a près sur l'équation de départ). Ici, on doit donc avoir $\frac{3k+2}{k-1}\geqslant 0$, et $\frac{2k-1}{k-1}\geqslant 0$. Si $k>1$, cela impose $k\geqslant\frac{1}{2}$ (toujours vérifié) et $k\geqslant-\frac{2}{3}$ (toujours vérifié aussi), donc toutes les valeurs de k dans l'intervalle $\left]1,\frac{3}{2\sqrt{2}}\right[$ conviennent. Si $k<1$ par contre, il faut $k\leqslant\frac{1}{2}$, et $k\leqslant-\frac{2}{3}$, les valeurs appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{3}{2\sqrt{3}},-\frac{2}{3}\right]$ sont donc aussi convenables.

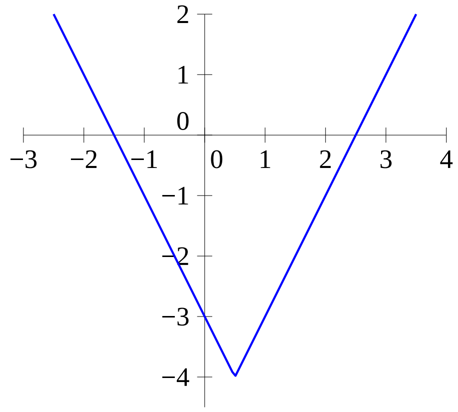
Exercice 13 (**)

Pour contourner le problème, élevons au carré l'égalité qui nous est donnée dans l'énoncé : $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}=(\sqrt{5})^2=5$, donc $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=5-2=3$. Élevons maintenant au carré l'expression qu'on nous demande de calculer (avec ou sans valeur absolue, ça ne change rien) : $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}=1$ en exploitant le calcul précédent. Notre nombre a donc un carré égal à 1, et il est positif (c'est une valeur absolue), il vaut forcément 1.

Exercice 14 (**)

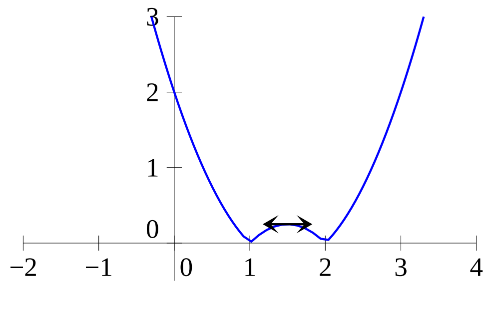
1. La fonction $x\mapsto 2x-1$ est toujours croissante, et s'annule en $\frac{1}{2}$. De là, il est aisé d'obtenir le tableau de variations de f, ainsi que sa courbe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		↘	-4	↗	



2. On commence par étudier variations et signe de ce qui se trouve à l'intérieur de la valeur absolue. Le trinome a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$. De plus, $x^2 - 3x + 2$ a pour dérivée $2x - 3$, et admet donc un minimum en $x = \frac{3}{2}$, de valeur $\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$. On en déduit le tableau et la courbe :

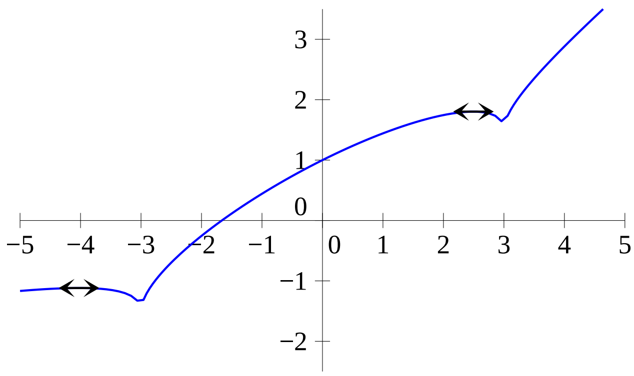
x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f		↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	



3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, mais il vaut mieux essayer de l'exprimer de différentes façons selon la valeur de x. Si $x \geqslant 3$, on a $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 9}$, et la fonction est croissante sur $[3; +\infty[$ en tant que somme de deux fonction croissantes. Sur les deux autres intervalles à étudier, les calculs vont être un tout petit peu plus pénibles... Començons par exemple par $[-3; 3]$, intervalle sur lequel $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$. On a sur cet intervalle $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}} = \frac{3\sqrt{9 - x^2} - 2x}{6\sqrt{9 - x^2}}$. Cette dérivée est positive sur $[-3; 0]$, mais s'annule lorsque $x > 0$ et $3\sqrt{9 - x^2} = 2x$, soit (en passant tout au carré) $9(9 - x^2) = 4x^2$, ou encore $81 = 13x^2$. La fonction f est donc croissante sur $\left[-3; \sqrt{\frac{81}{13}}\right]$, et décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{81}{13}}; 3\right]$ (pour

information, la valeur un peu bizarre vaut environ $2,5$). Ne reste plus qu'à s'occuper de l'intervalle $]-\infty;-3]$, où la fonction est égale à $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2-9}$. Un calcul extrêmement similaire au précédent montre que la dérivée s'annule lorsque $3\sqrt{x^2-9}=-2x$, soit $9(x^2-9)=4x^2$. On obtient donc un autre minimum local pour $x=-\sqrt{\dfrac{81}{5}}$ (un peu avant -4). On peut même, avec un peu de motivation, calculer les valeurs de nos maxima locaux : $f\left(-\dfrac{9}{\sqrt{5}}\right)=-\dfrac{9}{2\sqrt{5}}+\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{81}{5}}=-\dfrac{9}{2\sqrt{5}}+\dfrac{6}{3\sqrt{5}}=-\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\simeq-1,12$. De même, on obtient $f\left(\dfrac{9}{\sqrt{13}}\right)=\dfrac{\sqrt{13}}{2}\simeq 1,8$ Voici donc le magnifique tableau de variations et la non moins superbe courbe représentative de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\dfrac{9}{\sqrt{5}}$		-3		$\dfrac{9}{\sqrt{13}}$		3		$+\infty$
f		$\nearrow$	$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	



Complément pour les plus motivés : étude des asymptotes à la courbe représentative de f. On constate sans difficulté que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. C'est moins évident de l'autre côté : on peut écrire $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{9}{x^2}\right)}$ (si $x<-3$). Attention, comme $x<0$, on a $\sqrt{x^2}=-x$, donc $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}x\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}}=x\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}}\right)$. La parenthèse ayant pour limite $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$ en $-\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. En reprenant le calcul qu'on vient d'effectuer, on obtient sans problème $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{6}$. Reste maintenant à calculer $f(x)-\dfrac{1}{6}x=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}x\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}}=\dfrac{x}{3}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}}\right)$. On a une belle forme indéterminée, mais un petit coup de quantité conjuguée permet de s'en sortir : $f(x)-\dfrac{1}{6}x=\dfrac{x}{3}\times\dfrac{1-1+\frac{9}{x^2}}{1+\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\dfrac{3}{x(1+\sqrt{1-\frac{9}{x^2}})}$, qui a une limite nulle en $-\infty$. On en déduit que la droite d'équation $y=\dfrac{1}{6}x$

est asymptote oblique à notre courbe en $-\infty$. En $+\infty$, le calcul est quasiment le même, sauf que c'est un x et non un $-x$ qui sort de la racine carrée quand on factorise, ce qui donne une limite pour $\frac{f(x)}{x}$ égale à $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. On obtient ensuite de même que la droite d'équation $y=\frac{5}{6}x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

Encore un calcul possible, celui du signe de f. La fonction est clairement positive si $x \geqslant 0$, et elle s'annule sur $\mathbb{R}^-$ si $\frac{1}{3}\sqrt{|x^2-9|}=-\frac{1}{2}x$. En élevant au carré (tout est positif avec notre hypothèse), on trouve $\frac{1}{9}|x^2-9|=\frac{1}{4}x^2$. Ce qui nous laisse deux possibilités : soit $\frac{x^2-9}{9}=\frac{1}{4}x^2$, ce qui donne $x^2\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)=1$, ce qui est impossible (on obtient une valeur négative pour x^2), soit $\frac{9-x^2}{9}=\frac{1}{4}x^2$, soit $x^2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\right)=1$, donc $\frac{13}{36}x^2=1$, et $x=-\frac{6}{\sqrt{13}}$ (on ne garde que la valeur négative), soit $x \simeq -1.66$.