Chapitre 5 : Équations différentielles

PTSI B Lycée Eiffel

10 novembre 2017

Lors d'une grosse fiesta organisée chez les fonctions,
la fonction exponentielle peurniche dans un coin.
Les autres fonctions viennent la voir :
- Bah pourquoi tu pleures ?
- Bououh snif, je suis toute seule, bouhouhou.
- Bah viens avec nous, on va t'intégrer !
- Non, snif snif, c'est pas la peine, bouhouhou, ça changera rien !

1 Introduction

Les équations différentielles sont un outil absolument fondamental en mathématiques, intervenant très régulièrement dans quantité de problèmes faisant intervenir une modélisation par des fonctions. Vous en retrouverez régulièrement l'usage en physique notamment. Les problèmes de résolution d'équations différentielles sont en général extrêmement difficiles à résoudre (nombre de problèmes mathématiques ouverts à l'heure actuelle concernent des équations différentielles), c'est pourquoi nous nous contenterons dans ce chapitre d'apprendre à résoudre des types très particuliers d'équations. Dans les cas qui nous concernent, les méthodes sont clairement définies et leur application quasiment mécanique.

Objectifs du chapitre :

- Reconnaitre sans hésitation les primitives classiques.
- Maîtriser les techniques d'intégration par parties et de changement de variable, et savoir les employer à bon escient.
- Savoir résoudre une équation linéaire du premier ordre ou du second ordre à coefficients constants, en maîtrisant notamment la méthode de variation de la constante.
- Comprendre et savoir analyser un problème de recollement de solutions.

2 Primitives et intégrales

2.1 Définitions

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive** de f sur I si la fonction F est dérivable sur I et vérifie $F' = f$.

Exemple : Sur n'importe quel intervalle, la fonction $x \mapsto 1$ a pour primitive $x \mapsto x$, mais aussi $x \mapsto x + 2$; $x \mapsto x - \sqrt{127}$ etc. Sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ln(x)$.

Proposition 1. Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, la fonction $x \mapsto F(x) + k$ ($k \in \mathbb{R}$) est également une primitive de f. Réciproquement, si G est une primitive de f, la fonction $G - F$ est constante (autrement dit, il existe une constante k pour laquelle $G = F + k$).

Démonstration. C'est essentiellement évident : si $F' = f$, alors $(F+k)' = f$ donc $F+k$ est une primitive de f. Et si F et G sont deux primitives de f, on a $(G-F)' = f - f = 0$, donc $G-F$ est constante (la démonstration rigoureuse de ce point attendra le chapitre sur la dérivation et le théorème des accroissements finis). □

Proposition 2. Soit f continue sur I et $a \in I$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur I. Il s'agit de l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Démonstration. L'unicité est évidente : si deux primitives de f s'annulent en a, puisqu'elles diffèrent d'une constante, cette constante et nécessairement nulle. La preuve rigoureuse de la première partie de l'énoncé nécessite d'une part une définition claire de l'intégrale, et d'autre part des techniques d'analyse un peu poussées, nous l'admettrons pour l'instant (ce théorème est connu sous le nom de théorème fondamental de l'analyse). □

Corollaire 1. Toute fonction continue sur un segment y admet une primitive.

Remarque 1. Elle en admet même une infinité, qui diffèrent toutes d'une constante, mais toutes les primitives ne peuvent pas nécessairement se mettre sous la forme précédente puisqu'elles ne s'annulent pas nécessairement sur I.

Définition 2. Pour une fonction F continue sur un segment $[a,b]$, on note $[F(x)]_a^b$ le réel $F(b) - F(a)$.

Exemple : La détermination de primitive sera bien sûr la technique privilégiée pour le calcul explicite d'intégrales. Par exemple, $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$.

Exemple : Il faudra également être capable de reconnaître immédiatement les dérivées de composées les plus classiques, qui permettent de calculer directement des intégrales pas toujours évidentes à repérer. Ainsi, $\int_0^1 2te^{t^2}\,dt = [e^{t^2}]_0^1 = e - 1$.

Pour conclure ce paragraphe, un petit tableau des primitives et formules utiles à connaître. Rien de nouveau bien entendu, puisque ce tableau est simplement obtenu en « retournant » celui des dérivées classiques. D'autres primitives peuvent être considérées comme classiques, comme par exemple celle de la tangente qui s'obtient simplement en écrivant $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et en repérant une dérivée de ln, mais elles sont volontairement omises car on les retrouvera (et on détaillera donc le calcul) systématiquement dans les exercices. Dans la dernière colonne du tableau, f (ou g) désigne une fonction continue quelconque, et F (ou G) une de ses primitives.

Fonction	*Primitive*	*Fonction*	*Primitive*	*Fonction*	*Primitive*
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	kf	kF
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$f+g$	$F+G$
e^x	e^x	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$u'f(u)$	$F(u)$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$f'f$	$\frac{f^2}{2}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$			$\frac{f'}{f}$	$\ln\|f\|$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$			$f'e^f$	e^f

Exemple : étude d'une fonction définie par une intégrale. Un type d'exercices très classique (et donc à maîtriser) consiste à faire étudier une fonction définie par une intégrale à bornes variables. Même si

on ne sait pas intégrer la fonction sous l'intervalle, on pourra toujours réussir à calculer explicitement la dérivée de la fonction à étudier, comme dans l'exemple suivant : $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh}(t)}{t}\ dt$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(t)}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, $\varphi(x)$ sera donc défini si $\forall t \in [x, 2x]$, $t \neq 0$. C'est le cas si $x \neq 0$, donc $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}^*$.
Étudions les variations de φ : en notant F une primitive de f sur l'un des deux intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$, on peut écrire $\varphi(x) = F(2x) - F(x)$, donc en dérivant $\varphi'(x) = 2f(2x) - f(x) = \dfrac{2\operatorname{sh}(2x)}{2x} - \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} = \dfrac{\operatorname{sh}(2x) - \operatorname{sh}(x)}{x}$. La fonction sh étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(2x) - \operatorname{sh}(x)$ est du signe de x (si $x \geqslant 0$, $2x \geqslant x$, mais si $x < 0$, $2x < x$), donc $\varphi'(x) \geqslant 0$ sur chacun des deux intervalles.
On peut compléter l'étude par des calculs de limite, que nous ne détaillerons pas ici (car ils utilisent des techniques sur les intégrales dont nous parlerons dans un futur chapitre), mais qui apparaissent dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-\infty \nearrow 0$	$\Vert$	$0 \nearrow +\infty$

On peut même prolonger φ par continuité en posant $\varphi(0) = 0$ pour en faire une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2.2 Intégration par parties

Théorème 1. Intégration par parties.
si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ dt$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule de dérivation d'un produit : uv est une primitive de $u'v + uv'$, donc $[uv]_a^b = \displaystyle\int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\ dt$, et la formule en découle immédiatement. □

Remarque 2. Cette formule peut paraitre peu intéressante dans la mesure où on se contente de remplacer une intégrale de produit par une autre intégrale de produit, mais elle est en fait extrêmement importante en pratique. Elle sera très souvent utilisée dans le cas d'un calcul d'intégrale de produit peu évident, que l'on souhaite transformer un produit plus simple. Il faut bien comprendre que lors d'une intégration par parties (qu'on abrégera systématiquement en IPP), l'une des deux fonctions du produit est dérivée et l'autre intégrée. On essaiera donc de prendre pour v des fonctions qui se simplifient en dérivant (par exemple $v(t) = t$, ou $v(t) = \ln(t)$), et pour u' des fonctions qui ne se compliquent pas trop quand on intègre (par exemple $u'(t) = e^t$).

Exemple : On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\ dx$. On fait une première IPP en posant $v(x) = x^2$, donc $v'(x) = 2x$, et $u'(x) = u(x) = e^x$, ce qui donne $I = [x^2 e^x]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 2xe^x\ dx = e - 2\int_0^1 xe^x\ dx$.
On peut effectuer une deuxième IPP en posant cette fois-ci $v(x) = x$, donc $v'(x) = 1$, et toujours $u'(x) = u(x) = e^x$, ce qui donne $I = e - 2[xe^x]_0^1 + 2\displaystyle\int_0^1 e^x\ dx = e - 2e + 2[e^x]_0^1 = e$.

Exemple : On peut calculer une primitive de la fonction ln à l'aide d'une IPP. Pour cela, on va présenter le calcul sous forme d'intégrale « sans borne » qui se rédige comme un calcul d'intégrale classique mais a l'avantage de faire disparaitre les éventuelles constantes d'intégration (dans le cas d'une IPP, le crochet du produit uv sera simplement remplacé par le produit $u(x)v(x)$). Ainsi, on peut écrire une primitive de la fonction ln sous la forme $F(x) = \int \ln(t)\ dt$. Il n'y a pas de produit, ce qui peut sembler rédhibitoire pour une IPP. Ce n'est en fait pas un problème, on pose simplement $v(t) = \ln(t)$ et $u'(t) = 1$, ce qui donne $v'(t) = \frac{1}{t}$ et $u(t) = t$. On obtient alors $F(x) = x\ln(x) - \int \frac{t}{t}\ dt = x\ln(x) - x$. C'est bien la formule classique donnée dans le tableau ci-dessus.

2.3 Changement de variable

Théorème 2. Changement de variable.
Soit f une fonction continue sur le segment $[\varphi(a), \varphi(b)]$, où φ effectue une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ vers $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Alors $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\ dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\ du$.

Démonstration. C'est cette fois-ci une conséquence directe de la formule de dérivation d'une composée : $\varphi' \times f \circ \varphi$ a pour primitive $F \circ \varphi$ (où F est une primitive quelconque de f), donc $\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\ du = [F \circ \varphi(u)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\ dt$. □

Remarque 3. En pratique on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle. Si on dispose d'une intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable, on « pose » $t = \varphi(x)$, et on effectue alors les modifications suivantes dans notre intégrale :

- on remplace les bornes a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
- on remplace dans l'intégrale $f(x)$ par $f \circ \varphi(t)$ (autrement dit, on remplace tous les x par des t).
- on modifie le dx en $\varphi'(t)dt$ (on écrira simplement $dx = \varphi'(t)dt$ même si c'est un abus de notation).

Ces modifications reviennent bien à appliquer la formule donnée dans le théorème.

Exemple : Un calcul extrêmement classique faisant intervenir un changement de variable, celui de $I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\ dx$. On pose $x = \sin(t)$, ou si vous préférez $t = \arcsin(x)$. On remplace alors les bornes par $\arcsin(0) = 0$ et $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$; $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ (car $\cos(t) \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) ; et $dx = \cos(t)\ dt$. On obtient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\ dt$. On peut alors utiliser la formule de duplication $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ pour écrire $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\ dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$. Rien de surprenant dans ce résultat pusiqu'on vient de calculer l'aire d'un quart de cercle de rayon 1.

Remarque 4. C'est à l'aide de la formule de changement de variable qu'on peut prouver de façon rigoureuse les résultats suivants, qui sont géométriquement évidents : si f est une fonction impaire, $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$ (en faisant le changement de variable $t = -x$, on constate que cette intégrale est égale à son propre opposé) ; et si f est une fonction paire, $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{-a}^{a} f(x)\ dx$ (même technique).

2.4 Fractions rationnelles

Définition 3. Une **fraction rationnelle** est un quotient de polynômes.

Théorème 3. Principe de la décomposition en éléments simples.
Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, alors on peut décomposer F sous la forme d'une somme de termes de type $\dfrac{k}{x+a}$ ou de type $\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}$, avec un dénominateur à discriminant négatif. Les dénominateurs des fractions correspondent aux différents facteurs intervenant lorsqu'on factorise le polynôme Q.

Démonstration. Ce théorème n'étant pas explicitement à votre programme, nous ne le démontrerons pas. Il faut en fait essayer de comprendre comment ça fonctionne, car vous êtes tout de même censés savoir faire des décompositions en éléments simples en pratique. Prenons le cas le plus simple où Q est un polynôme à racines simples, sans facteurs du second degré. Si on note a_1, a_2, ..., a_n ses racines, on peut alors simplement écrire $F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x-a_i}$. Autrement dit, le produit qui était présent au dénominateur a été séparé en somme de dénominateurs distincts. Les choses se compliquent dans deux cas :

- Si on travaille sur $\mathbb{R}$ (ce qui sera toujours notre cas), il peut y avoir un facteur de degré 2 à discriminant négatif, qu'on ne peut pas factoriser plus. Pas grave, il comptera comme un terme normal, mais au lieux d'avoir une constante au numérateur, on aura un polynôme de degré 1 (c'est encore cohérent avec le fait qu'il faille deux constantes pour gérer un dénominateur de degré 2).
- Il y a une racine multiple, ce qui implique la présence d'un dénominateur de type $(x+a)^2$ (ou pire ; on peut avoir la même chose pour les facteurs de degré 2 à discriminant négatif). Nous ferons semblant de ne pas nous rendre compte que ce cas peut se produire, car la gestion du calcul de primitive est alors compliquée.

□

Techniques de calcul : Pour effectuer en pratique une décomposition en éléments simples, il est utile de connaître quelques petites techniques, qui évitent de recourir au calcul brutal consistant à mettre au même dénominateur tous les termes pour identifier.

- Dans le cas de dénominateurs de degré 1 de la forme $x-a$, on peut multiplier les deux membres par $x-a$ puis évaluer l'égalité pour $x = a$. Par exemple, pour effectuer la décomposition de $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-x-2}$, on commence par factoriser le dénominateur sous la forme $(x+1)(x-2)$ (il y a une racine évidente). Le théorème de décomposition nous assure alors que $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2}$. Multiplions l'égalité par $x+1$: cela donne $\dfrac{2x+3}{x-2} = a + \dfrac{b(x+1)}{x-2}$. En prenant $x = -1$, on trouve alors $-\dfrac{1}{3} = a$. De même, en multipliant l'égalité par $x-2$ on trouve $\dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{a(x-2)}{x+1} + b$, donc $b = \dfrac{7}{3}$ en prenant $x = 2$. Conclusion : $\dfrac{2x+3}{x^2-x-2} = -\dfrac{5}{x+1} + \dfrac{7}{3(x-2)}$.
- S'il y a des termes de degré supérieur, on peut obtenir une équation sur les coefficients en évaluant l'égalité pour une valeur simple de x (souvent $x = 0$) sans multiplication préalable. On peut également obtenir une équation en regardant la limite quand x tend vers $+\infty$, en multipliant au besoin par x ou x^2 pour faire apparaître des limites non nulles. Prenons par exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$. On commence toujours par factoriser le dénominateur $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, on ne peut pas aller plus loin. On va donc tenter de réduire f sous la forme $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$. En

multipliant par $x+1$ et en évaluant en -1, on trouve sans problème $a = \frac{1}{3}$. Pour le reste, il nous faut deux informations supplémentaires. On peut regarder en 0 pour trouver $1 = a + c$, soit $c = 1 - a = \frac{2}{3}$. Enfin, on peut multiplier par x et regarder la limite en $+\infty$, ce qui donne $0 = a + b$, soit $b = -a = -\frac{1}{3}$. Conclusion : $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$.

Intégration des éléments simples : C'est bien de savoir réduire en éléments simples, mais si le but est de calculer une intégrale, il faudra bien sûr ensuite être capable d'intégrer chacun de ces éléments « simples ». Les termes en $\frac{k}{x-a}$ ne posent aucun problème, ayant une primitive en ln.

Par contre, les termes d'ordre 2 sont plus compliqués. Le but est de se ramener à une fonction dont on connait bien une primitive, à savoir $\frac{1}{1+x^2}$. Pour cela, on essaie d'isoler un morceau qui s'intègre, puis pour le reste, on met le dénominateur sous forme canonique, puis on bidouille les constantes à coup de changements de variable. Reprenons notre exemple $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$. Tentons de calculer l'intégrale I de 0 à 1 de cette fonction. Le premier morceau ne pose pas de problème : $\int_0^1 \frac{1}{3(x+1)}\,dx = \frac{\ln(2)}{3}$. Pour l'autre morceau, $\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}$, donc $\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2-x+1)]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = 0 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{4}{3} \times \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2+1}\,dx = -2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = -\sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. On peut maintenant conclure le calcul : $I = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

3.1 Vocabulaire

Définition 4. Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction y (réelle ou complexe, même si nous traiterons surtout le cas réel dans ce chapitre), et faisant intervenir les dérivées successives y', y'', …, $y^{(n)}$ de la fonction y. L'équation est dite **d'ordre** n si la dérivée d'ordre le plus élevé de y apparaissant dans l'équation est $y^{(n)}$. **Résoudre** l'équation différentielle sur un intervalle I consiste à déterminer toutes les fonctions dérivables sur I vérifiant l'équation.

Remarque 5. On utilise généralement la variable muette x ou t pour indiquer la variable, mais on notera souvent l'inconnue y, y compris dans l'équation, et pas nécessairement $y(x)$. Ainsi, on parlera par exemple de l'équation $xy' + 3x^2y^2 = 0$.

Définition 5. Une équation différentielle est **linéaire** si elle s'écrit sous la forme $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$.

Définition 6. Une équation différentielle linéaire est **normalisée** si $a_n(x) = 1$. Une équation différentielle est **homogène** (ou **sans second membre**) si $b(x) = 0$.

Définition 7. Les **courbes intégrales** associées à une équation différentielle sont les courbes représentatives des fonctions solutions de l'équation différentielle.

3.2 Résolution de l'équation sans second membre associée

Définition 8. Un **problème de Cauchy** associé à l'équation homogène du premier ordre est un système de la forme

$$\begin{cases} y' + a(x)y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & \alpha \end{cases}$$

On parle aussi d'équation différentielle avec conditions initiales.

Théorème 4. Soit $y' + a(x)y = 0$ une équation linéaire homogène du premier ordre, avec a continue sur l'intervalle d'étude I. Alors ses solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{-A(x)}$, où K est une constante réelle et A une primitive (fixée) de a.

Démonstration. Commençons par constater que ces fonctions sont effectivement solutions de l'équation : si $y(x) = Ke^{-A(x)}$, alors $y'(x) = -Ka(x)e^{-A(x)}$, donc $y'(x) + a(x)y(x) = -Ka(x)e^{-A(x)} + Ka(x)e^{A(x)} = 0$. Réciproquement, supposons y solution de l'équation et posons $z(x) = y(x)e^{A(x)}$, où A est un primitive quelconque de a (qui, étant continue, possède des primitives), on a alors $z'(x) = y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} = e^{A(x)}(y'(x) + a(x)y(x)) = 0$. La fonction z a une dérivée nulle, elle est donc constante, égale à un certain réel K. On a alors, par définition de z, $y(x) = Ke^{A(x)}$. □

Remarque 6. Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires du premier ordre ont donc toujours une solution unique (la valeur imposée permet de fixer la constante K). En particulier, on peut définir la fonction exponentielle comme unique solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.

Exemple : Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$ (sur $\mathbb{R}$), avec comme condition initiale $y(1) = 2$. Les solutions de l'équation sont de la forme Ke^{-x^2}, et la condition initiale se traduit alors par $Ke^{-1} = 2$, soit $K = 2e$, donc l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction $y : x \mapsto 2e^{1-x^2}$.

3.3 Résolution de l'équation complète

Théorème 5. Soit $y' + a(x)y = b(x)$ une équation différentielle linéaire sur un intervalle I, avec a continue sur I. Alors les solutions de cette équation sont de la forme $x \mapsto Ke^{-A(x)} + y_p(x)$, où K est une constante réelle, A une primitive fixée de a, et y_p une solution particulière quelconque de l'équation.
Si de plus on impose la condition $y(x_0) = \alpha$, avec $x_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, la solution du problème de Cauchy existe et est unique, il s'agit de la fonction $x \mapsto \alpha e^{A(x_0)-A(x)} + e^{-A(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}b(t)\ dt$.

Remarque 7. La première partie du théorème indique simplement que toute solution de l'équation complète est obtenue comme somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation sans second membre.

Démonstration. Commençons par la première affirmation. Soit donc y_p une solution particulière et y une solution quelconque. On a $y' + a(x)y = b(x) \Leftrightarrow y' + a(x)y = y_p' + a(x)y_p \Leftrightarrow (y - y_p)' + a(x)(y - y_p) = 0$. La différence des deux fonctions est donc solution de l'équation homogène, ce qui en utilisant les résultats du paragraphe précédent donne la forme demandée.
La deuxième moitié fait intervenir une technique qui sera fondamentale pour la suite. On cherche une fonction y vérifiant l'équation et telle que $y(x_0) = \alpha$. Posons $z(x) = y(x)e^{A(x)}$. On obtient, très similairement à ce qu'on a fait pour les équations homogènes un peu plus haut, $z'(x) = b(x)e^{A(x)}$. La fonction z est donc la primitive de be^A valant $\alpha e^{A(x_0)}$ en x_0 (cette primitive est unique), c'est-à-dire $z(x) = \alpha e^{A(x_0)} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt$. Cela donne bien la formule souhaitée pour y. □

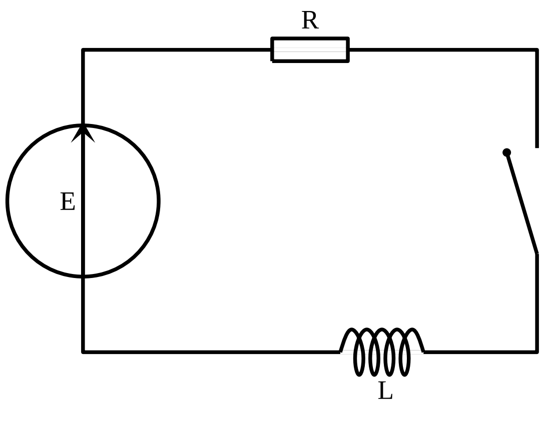
Remarque 8. Cette formule n'est à peu près d'aucune utilité pour le calcul pratique de solution, puisqu'on ne saura pas calculer l'intégrale. Pour réellement résoudre une équation différentielle, il faut (et c'est bien le plus difficile) trouver une solution particulière. Pour cela, deux techniques utiles :

Méthode de variation de la constante :
Il est naturellement conseillé dans un premier temps de chercher une solution particulière « évidente » (nous reviendrons sur certains cas particuliers un peu plus loin). Toutefois, dans le cas général, il n'existe pas de solution particulière simple, et on a alors recours à la méthode suivante : on cherche y_p de la forme $K(x)e^{-A(x)}$. Autrement dit, y_p est de la même forme que les solutions de l'équation homogène, à la différence près qu'on a remplacé la constante K par une fonction $K(x)$ (d'où le nom de variation de la constante).

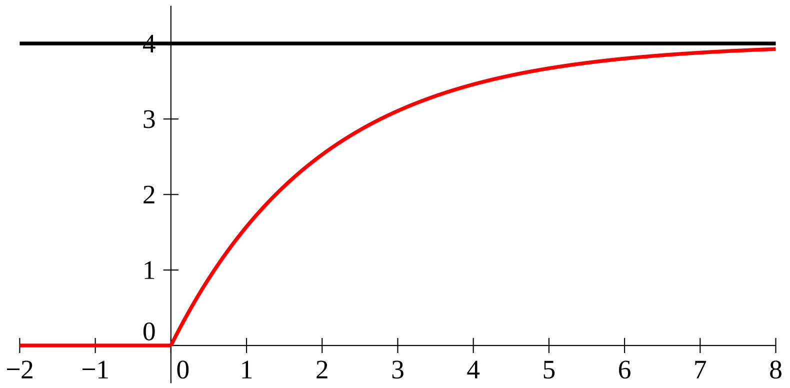
Exemple 1 : On cherche à résoudre l'équation différentielle $y' + xy = x$. L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}}$, et une solution particulière évidente est la fonction constante égale à 1, donc les solutions de l'équation sont de la forme $Ke^{-\frac{x^2}{2}} + 1$.

Exemple 2 : On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y' + 2\frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$. L'équation homogène associée est $y' + 2\frac{y}{x} = 0$, dont les solutions sont de la forme $Ke^{-A(x)}$, où A est une primitive quelconque de $\frac{2}{x}$. Une telle primitive est $2\ln x$, donc les solutions sont les fonctions $Ke^{-2\ln(x)} = \frac{K}{x^2}$. Reste à trouver une solution particulière, via la méthode de variation de la constante : posons $y(x) = \frac{K(x)}{x^2}$, on a alors $y'(x) = \frac{K'(x)}{x^2} - 2\frac{K(x)}{x^3}$, donc $\frac{K'(x)}{x^2} - 2\frac{K(x)}{x^3} + 2\frac{K(x)}{x^3} = \frac{e^x}{x}$. La fonction K est donc une primitive de $x \mapsto xe^x$. On peut par exemple choisir $K(x) = \int_0^x te^t\ dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t\ dt = xe^x - e^x + 1$. On obtient finalement toutes les solutions de l'équation initiale sous la forme $x \mapsto \frac{K' + (x-1)e^x}{x^2}$, où $K' = K + 1$.

Exemple 3 : On considère un circuit électrique constitué d'un échelon de tension E, une résitance R, une bobine d'inductance L et un interrupteur. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, qui était jusque là ouvert. Comment évolue l'intensité i dans le circuit ?



L'intensité vérifie l'équation différentielle $L\frac{di}{dt} + Ri = E$, avec comme condition initiale $i(0) = 0$. En notant $\tau = \frac{L}{R}$ (constante de temps du circuit), on obtient $i' + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto Ke^{-\frac{t}{\tau}}$, et la fonction constance $\frac{E}{R}$ est solution particulière de l'équation. La solution générale est donc de la forme $t \mapsto \frac{E}{R} + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$. Comme de plus $i(0) = 0$, on obtient $K = -\frac{E}{R}$, soit $i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ (si $t \geqslant 0$, bien entendu). La courbe ressemble à ceci (on a pris $\frac{E}{R} = 4$ et $\tau = 2$) :



La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec une asymptote horizontale de valeur $\frac{E}{R}$ en $+\infty$. En physique, on dira plutôt que l'intensité est en régime permanent quand elle s'approche fortement de son asymptote (en pratique, pour un circuit RL, on considère le régime permanent atteint pour $t = 3\tau$, à cet instant, l'intensité vaut environ 95% de sa valeur maximale), et en régime transitoire dans sa période de forte croissance.

Proposition 3. Principe de superposition.
Soit $y' + a(x)y = 0$ une équation différentielle homogène et y_1, y_2 des solutions particulières respectives des équations $y' + a(x)y = b_1(x)$ et $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de l'équation avec pour second membre $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Démonstration. C'est un calcul idiot : si $y_1' + a(x)y_1 = b_1(x)$ et $y_2' + a(x)y_2 = b_2(x)$, on a en additionnant $(y_1 + y_2)' + a(x)(y_1 + y_2) = b_1(x) + b_2(x)$. □

Méthode : dans certains cas de second membre bien particulier, quand a est une fonction constante, on peut systématiquement se dispenser de la méthode de variation de la constante, et chercher directement une solution particulière d'une forme pas trop compliquée. Voici les trois principaux cas que vous croiserez :

- l'équation $y' + ay = P(x)$, où a est constante, et $P(x)$ est un polynôme de degré n, admet une solution particulière polynomiale de degré n.
- l'équation $y' + ay = P(x)e^{kx}$, où a est constante et P est un polynôme de degré n, admet une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q(x)e^{kx}$, où Q est un polynôme de degré n si $a + k \neq 0$, de degré $n + 1$ sinon.
- l'équation $y' + ay = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$, où a est une constante, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme $\gamma \cos(\omega x) + \delta \sin(\omega x)$.

Exemples :

- On cherche à résoudre l'équation $y' - y = (2x+1)e^x$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ke^x, et comme le coefficient dans l'exponentielle correspond à celui du membre de droite, on va chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. On a alors $y_p'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$, donc y_p est solution de l'équation complète si $(2ax + b)e^x = (2x + 1)e^x$. On peut choisir $a = b = 1$ (et par exemple $c = 0$) pout obtenir la solution $y_p : x \mapsto (x^2 + x)e^x$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto (x^2 + x + K)e^x$.

- On cherche à résoudre l'équation $y' + 2y = \cos(2x) + 2\sin(2x)$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ke^{-2x}, et on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$. On aura donc $y_p'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$. La fonction y_p est solution de l'équation complète si $(2b+2a)\cos(2x)+(2b-2a)\sin(2x) = \cos(2x)+2\sin(2x)$. Cette relation est vérifiée si $2a+2b = 1$ et $2a-2b = 2$, ce qui donne en additionnant $4a = 3$ soit $a = \frac{3}{4}$, puis $b = a - 1 = -\frac{1}{4}$. Notre solution particulière est donc $y_p : x \mapsto \frac{3}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(x)$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-2x} + \frac{3}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(x)$.

4 Équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

Les méthodes ne sont pas très différentes de celles vues pour le premier ordre. Simplement, la complexité devenant nettement plus élevée, on se restreindra au cas de coefficients constants.

Définition 9. Une **équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants** est une équation différentielle du type $y'' + ay' + by = f(x)$, où a et b sont deux nombres complexes (ou réels), et f une fonction continue sur l'intervalle d'étude I. On associe à cette équation l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.
Un problème de Cauchy pour une équation du deuxième est constitué d'un système du type :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + ay' + by & = & f(x) \\ y(x_0) & = & \alpha \\ y'(x_0) & = & \beta \end{array}\right.$$

Définition 10. L'**équation caractéristique** associée à l'équation sans second membre est l'équation $r^2 + ar + b = 0$.

Théorème 6. Solutions complexes de l'équation sans second membre.
Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, les solutions complexes de l'équations homogènes sont les fonctions de la forme $Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$, où A et B sont deux constantes complexes.
Si l'équation caractéristique a une racine double r, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $(A + Bx)e^{rx}$, $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

Théorème 7. Solutions réelles de l'équation sans second membre.

- Si l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions relles de l'équations homogènes sont les fonctions de la forme $Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$, où A et B sont deux constantes relles.
- Si l'équation caractéristique a une racine double réelle r, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $(A + Bx)e^{rx}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Enfin, si l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$, les solutions sont de la forme $(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{rx}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 9. Dans tous les cas, les solutions de l'équation homogène s'écrivent comme combinaisons obtenues à partir de deux solutions particulières de cette équation. Nous aurons une interprétation de ce résultat quand nous aurons étudié les espaces vectoriels.

Démonstration. Dans un premier temps, occupons-nous du cas complexe. Commençons par rechercher les solutions de l'équation de la forme $y : x \mapsto e^{rx}$. On a alors $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2e^{rx}$, donc en factorisant par e^{rx}, y est solution de l'équation si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique. On en déduit aisément que, dans le cas des racines distinctes, les fonctions données dans le théorème sont effectivement solutions de l'équation.

Soit donc r_1 une racine de cette équation et y une solution de notre équation différentielle, qu'on va écrire (de façon très analogue au cas du premier ordre) sous la forme $y(x) = z(x)e^{r_1x}$. On a alors

$y'(x) = (z'(x) + r_1 z(x))e^{r_1 x}$ et $y''(t) = (z''(x) + 2r_1 z'(x) + r_1^2 z(x))e^{r_1 x}$. En factorisant une fois de plus par $e^{r_1 x}$, on obtient la condition $z'' + (2r_1 + a)z' + (r_1^2 + ar_1 + b)z = 0$. Le dernier terme du membre de gauche étant nul, la fonction z' est donc solution de l'équation différentielle du premier ordre $z'' + (2r_1 + a)z' = 0$. Dans le cas où r_1 est racine double de l'équation, on a $r_1 = -\dfrac{1}{2a}$ donc $2r_1 + a = 0$, et z'' est nulle ; z est donc une fonction affine, on retrouve bien des solutions de la forme $(A + Bx)e^{rx}$. Si r_1 n'est pas racine double, on a par contre $z'(x) = Ke^{-(2r_1+a)x}$. On a alors $z(x) = Ae^{-(2r_1+a)x} + B$, soit $y(x) = z(x)e^{r_1 x} = Ae^{-(r_1+a)x} + Be^{r_1 x}$. Or, la deuxième racine de l'équation caractéristique n'est autre que $-(r_1 + a)$, puisqu'on sait que les deux racines du trinome ont pour somme $-a$. On retrouve exactement les solutions annoncées.

Passons au cas réel. Les deux premiers cas (racines réelles distinctes ou racine double) sont exactement similaires, nous ne reprendrons pas les calculs. Concentrons-nous sur le cas des deux racines complexes conjuguées. On sait que dans ce cas $y(x) = e^{rx}(Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x})$. Examinons les valeurs prises par une telle fonction en $x = 0$ et en $x = \dfrac{\pi}{2\omega}$. Comme $y(0) = A + B$, pour que $y(0)$ soit réel, il faut avoir $\text{Im }(A) + \text{Im }(B) = 0$. De même, pour que y soit réelle en $\dfrac{2\pi}{\omega}$, il faut que $e^{\frac{2\pi r}{\omega}}(iA - iB)$ soit réel, ce qui se produit si $i(A - B) \in \mathbb{R}$, soit $A - B \in i\mathbb{R}$, ou encore $\text{Re }(A) = \text{Re }(B)$. Finalement, les deux condition combinées nous donnent $B = \overline{A}$, donc $y(x) = e^{rx}(Ae^{i\omega x} + \overline{A}e^{-i\omega x}) = 2e^{rx}\text{Re }(Ae^{i\omega x}) = 2e^{rx}(\text{Re }(A)\cos(\omega x) - \text{Im }(A)\sin(\omega x))$, qui est bien de la forme annoncée.

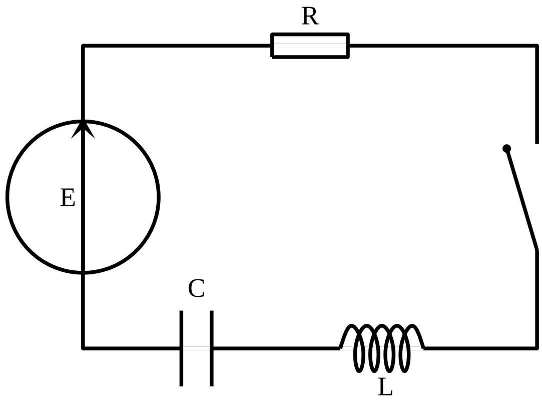
$\square$

Remarque 10. Une équation différentielle de la forme $y'' - \omega^2 y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}$, a donc pour solutions les fonctions de la forme $Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$. De même les solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ sont de la forme $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Ces équations apparaissent très fréquemment en physique. Pour la deuxième d'entre elles, on préfère en physique écrire les solutions sous la forme $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$, avec $A \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \left[0; \dfrac{2\pi}{\omega}\right[$. La constante A est appelée amplitude de la solution, et la constante φ déphasage.

Exemple 1 : Les solutions de l'équation différentielle homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ae^x + Be^{2x}$. Remarquons que si on impose les valeurs de y et de y' en un point, par exemple $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, il existe une seule solution qui les vérifie. Ici, on obtient le système $A + B = 1$ et $A + 2B = 0$, dont on tire $A = 2$ et $B = -1$. La seule solution de l'équation homogène vérifiant les deux conditions imposées est donc $y : x \mapsto 2e^x - e^{2x}$.

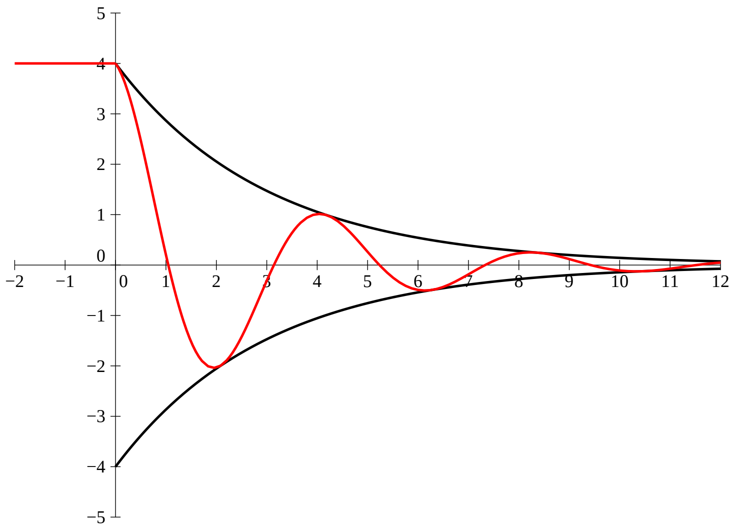
Exemple 2 : De même, les solutions de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ sont de la forme $x \mapsto (A + Bx)e^x$, et la seule vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est la fonction $x \mapsto e^x$.

Exemple 3 : Revenons une nouvelle fois à un peu de physique. On considère cette fois un circuit RLC série muni d'un interrupteur que, comme la dernière fois, on fermera à $t = 0$ (le circuit représenté ci-dessous contient un générateur, mais on ne résoudra que l'équation homogène, qui correspond donc au cas où $E = 0$).



On suppose le condensateur chargé avec une certaine charge q_0 avant la fermeture de l'interrupteur. On va s'intéresser à l'évolution de cette charge q. Elle est, mathématiquement parlant, la primitive de l'intensité i. Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par $u_C = \frac{q}{C}$, où C est une constante appelée charge du condensateur. On a dans le circuit $L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$, soit en exprimant tout en fonction de q, $q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0$. On note habituellement en physique $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (vous allez vite comprendre pourquoi), constante appelée pulsation propre du circuit, et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L}{R\omega_0}$, qu'on appelle facteur de qualité du circuit. Notre équation différentielle devient alors $q'' + \frac{\omega_0}{Q}q' + \omega_0^2 q = 0$. On a par ailleurs les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $q'(0) = 0$ (continuité de la charge et de l'intensité). Son équation caractéristique a pour discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$.

Le discriminant est positif quand $Q < \frac{1}{2}$, auquel cas les deux racines de l'équation caractéristiques sont $\frac{\omega_0}{2Q}(\pm\sqrt{1-4Q^2} - 1)$, négatives toutes les deux. La charge est donc une somme de deux exponentielles décroissantes, on parle alors de régime apériodique, la charge se contentant de décroitre de q_0 vers 0. Au contraire, lorsque $Q > \frac{1}{2}$, le discriminant de l'équation est négatif, et on a donc une charge qui est le produit d'une fonction périodique par une exponentielle décroissante. On parle alors de régime pseudo-périodique : la charge tend toujours vers 0, mais en oscillant avec une amplitude décroissante au cours du temps. Une allure de la fonction de charge dans ce cas :



Enfin, dans le cas où $Q = \dfrac{1}{2}$, il y a une racine double et une charge qui est produit d'une fonction affine par une exponentielle décroissante. On parle de régime critique, la courbe ressemble à celle du régime apériodique.

Théorème 8. Soit $y'' + ay' + by = f(x)$ une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Alors ses solutions sont de la forme $y : x \mapsto y_p(x) + y_h(x)$, où y_p est une solution particulière fixée de l'équation, et y_h parcourt l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Démonstration. C'est la même preuve que pour le premier ordre : si $y'' + ay' + by = f$, on a $y'' + ay' + by = y_p'' + ay_p' + by_p$, d'où $(y - y_p)'' + a(y - y_p)' + b(y - y_p) = 0$, et $y - y_p$ est donc solution de l'équation sans second membre. □

Théorème 9. Un problème de Cauchy associé à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants admet toujours une solution unique.

Démonstration. Plaçons-nous dans $\mathbb{C}$ et prenons par exemple le cas de deux racines complexes distinctes. Les solutions sont alors de la forme $x \mapsto y_p(x) + Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$. Imposer à une solution $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$ revient donc à demander que A et B soient solutions d'un système du type $Aa + Bb = \alpha$, $r_1 Aa + r_2 Bb = \beta$, où a, b, α et β sont des constantes complexes. Ce système a toujours une solution unique car $r_1 \neq r_2$. Les autres cas sont similaires. □

Proposition 4. Le principe de superposition reste vrai pour les équations différentielles du deuxième ordre.

Le problème reste le même que dans le cas des équations du premier ordre : trouver une solution particulière de l'équation. En général, il n'existe pas de méthode très efficace, c'est pourquoi nous nous bornerons à décrire une méthode dans un cas très particulier, celui où la fonction f est de la forme $P(t)e^{kt}$, où P est un polynome, et k un coefficient complexe. Par superposition, on saura alors trouver des solutions particulières quand le deuxième membre est une somme de telles fonctions.

Proposition 5. Soit $y'' + ay' + b = P(x)e^{kx}$ une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, telle que P soit un polynome de degré n. Alors il existe une solution particulière à l'équation de la forme $x \mapsto Q(x)e^{kx}$, avec $d^\circ(Q) = n$ si k n'est pas racine de l'équation caractéristique de l'équation, $d^\circ(Q) = n+1$ si k en est une racine simple et $d^\circ(Q) = n+2$ si k en est une racine double.

Exemple : On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$.
Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$.

Pour chercher une solution particulière, utilisons le principe de superposition et commençons par chercher une solution de l'équation $y'' - y = x^2 + 1$ sous la forme $y_1(x) = ax^2 + bx + c$. On a donc $y_1''(x) = 2a$, donc on cherche à avoir $-ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + 1$, ce qui nous donne comme conditions $-a = 1$, donc $a = -1$, $b = 0$, et $2a - c = 1$, donc $c = 2a - 1 = -3$. On obtient donc $y_1(x) = -x^2 - 3$.

Cherchons maintenant une solution particulière à l'équation $y'' - y = e^x$ sous la forme $y_2(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ (puisque 1 est racine de l'équation caractéristique). On a donc $y'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$, et $y''(x) = (\alpha + 2\alpha + \beta)e^x$, donc $y'' - y = e^x$ si (en factorisant par e^x) $\alpha x + 2\alpha + \beta - (\alpha x + \beta) = 1$, soit $\alpha = \dfrac{1}{2}$. On peut prendre n'importe quelle valeur pour β, choisissons par exemple $y_2(x) = \dfrac{1}{2}xe^x$.

Une solution particulière de l'équation complète est donc $y_p : x \mapsto -x^2 - 3 - \dfrac{xe^x}{2}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto -x^2 - 3 + \left(A - \dfrac{x}{2}\right)e^x + Be^{-x}$.

Remarque 11. On peut trouver de même des solutions particulières dans le cas où un cos ou un sin apparait dans le second membre de l'équation.

Exemple : On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x \cos x$.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + r + 1$, donc les racines sont $r_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, et $r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $x \mapsto \left(A\cos\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right) + B\sin\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}}$.
Pour trouver une solution particulière de l'équation générale, commençons par remarquer que $y'' + y' + y = \mathrm{Re}\ (e^{(1+i)x})$. Cherchons alors plutôt une solution particulière (complexe) de l'équation $y'' + y' + y = e^{(1+i)x}$. On la cherche sous la forme $y_p : t \mapsto ae^{(1+i)x}$, où a est une constante complexe. On a donc $y_p'(x) = a(1+i)e^{(1+i)x}$, et $y_p''(x) = (a(1+i)^2)e^{(1+i)x} = 2iae^{(1+i)x}$. En factorisant par $e^{(1+i)x}$, on voit que y_p est solution si $a(2+3i) = 1$, soit $a = \dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2-3i}{13}$. On a donc $y_p(x) = \dfrac{2-3i}{13}e^{(1+i)x}$, et en prenant sa partie réelle, on obtient une solution de notre équation initiale : $\widetilde{y}_p : x \mapsto \dfrac{2\cos(x) + 3\sin(x)}{13}e^x$.

Conclusion : les solutions de l'équation initiale sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{2\cos(x) + 3\sin(x)}{13}\right)e^x + \left(A\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + B\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

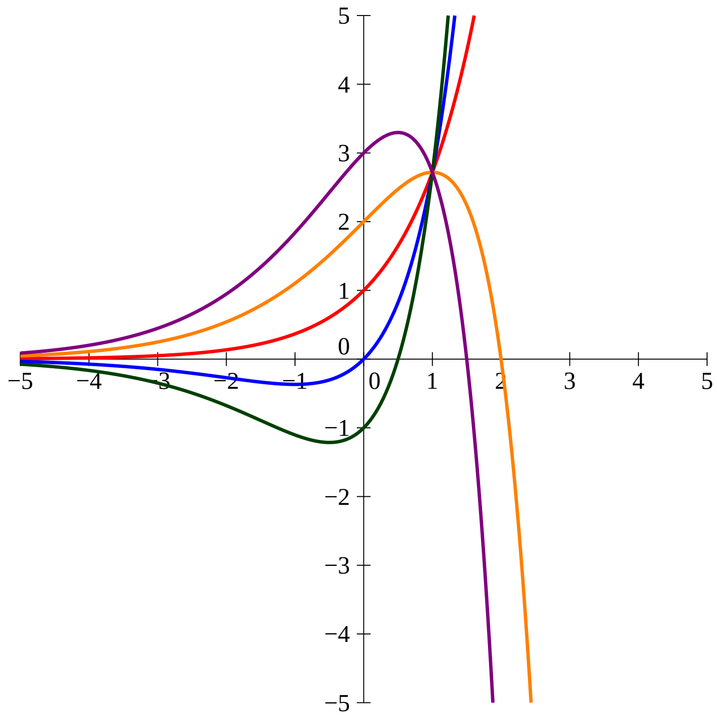
5 Compléments

5.1 Un exemple de recollement

Le recollement s'applique dans les cas où la normalisation d'une équation différentielle nous a obligé à découper un intervalle en deux intervalles de résolutions distincts, mais où on se demande s'il n'existe pas des solutions définies sur l'intervalle tout entier. Pour cela, le principe est très simple : on essaye de « recoller » des morceaux de solutions définis sur chacun des deux intervalles de façon à obtenir une fonction continue, mais aussi dérivable (et même deux fois dérivable dans le cas d'une équation du second ordre) à l'endroit du recollement.

Prenons un exemple concret avec l'équation $(1-x)y' + xy = e^x$. La normalisation de l'équation : $y' + \dfrac{x}{1-x}y = \dfrac{e^x}{1-x}$ impose de résoudre séparément sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$. En constatant que $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - 1$, les solutions de l'équation homogène associée sur l'intervalle I_2 sont de la forme $Ke^{x+\ln(1-x)} = Ke^x(1-x)$, avec $K \in \mathbb{R}$. Sur l'intervalle I_1, quitte à mettre un

$\ln(x-1)$ à la place du $\ln(1-x)$, on obtient des solutions de la forme $Le^x(x-1)$, avec $L \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle est solution triviale de l'équation initiale sur $\mathbb{R}$, et donc de l'équation normalisée sur chacun des deux intervalles de résolution. Les solutions de l'équation sur I_1 sont donc les fonctions $y_1 : x \mapsto e^x + L(x-1)e^x$, et sur l'intervalle I_2 il s'agit des fonctions $y_2 : x \mapsto e^x + K(1-x)e^x$. On constate que $\lim_{x \to 1^-} y_1(x) = \lim_{x \to 1^+} y_2(x) = 1$, indépendamment des valeurs de K et de L. Mais ce n'est pas suffisant, il faut aussi que les dérivées aient des limites communes. On calcule $y_2'(x) = e^x - Ke^x + K(1-x)e^x = (1-Kx)e^x$, qui a pour limite $1-K$ lorsque x tend vers 1. De même, la dérivée y_1' a pour limite $1+L$ lorsque x tend vers 1. On ne peut donc recoller les fonctions que si $L = -K$, c'est-à-dire que les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont tout simplement les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par des équations de la forme $y(x) = e^x + K(x-1)e^x$, avec $K \in \mathbb{R}$. Une allure de quelques courbes ($K = 0$ en rouge, $K = 1$ en bleu, $K = 2$ en vert, $K = -1$ en orange, $K = -2$ en violet ; on constate ici que le principe de Cauchy n'est pas vérifié en 1 où plusieurs solutions se coupent) :



5.2 Équations fonctionnelles

On peut résoudre certaines équations fonctionnelles (équations ayant comme inconnue une fonction, mais ne faisant pas intervenir les dérivées de cette fonction), en les ramenant à une équation différentielle via une dérivation de l'équation. Il est assez fréquent dans ce genre de problèmes que l'équation fonctionnelle fasse intervenir deux variables x et y, et qu'on ne dérive que par rapport à une seule des deux variables. On considèrera alors l'autre variable comme constante au cours du calcu, une technique de dérivation sur laquelle nous reviendrons dans un chapître ultérieur consacré aux fonctions à deux variables.

Proposition 6. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$, alors f est nulle ou $f(x) = e^{kx}$, pour une certaine constante réelle k.

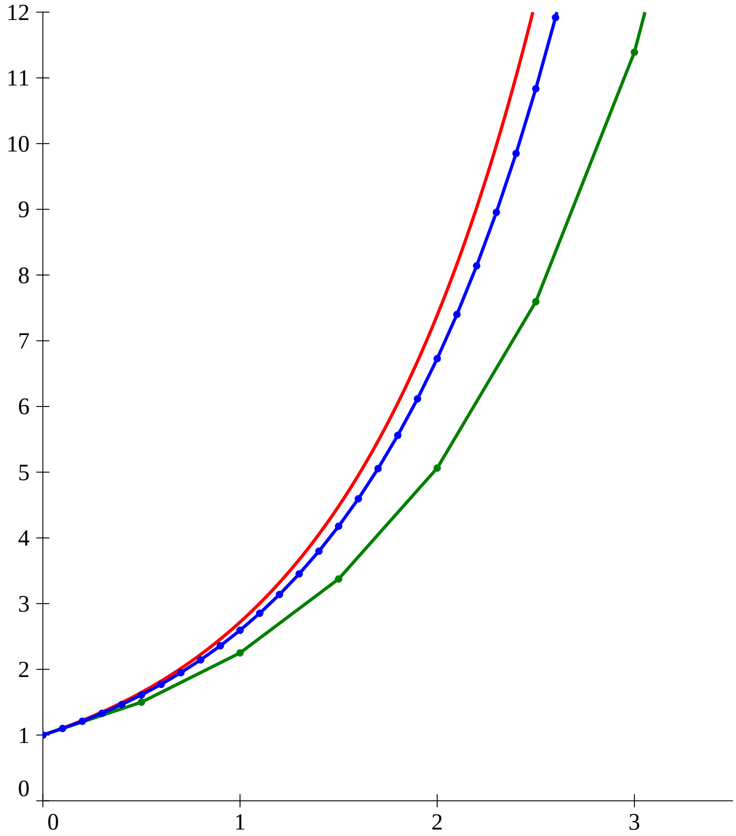
Démonstration. On a déjà vu au chapitre sur les fonctions usuelles que les exponentielles convenaient. Cherchons à prouver la réciproque. Si f est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle demandée, commençons par remarquer que $f(0) = (f(0))^2$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, on obtient en remplaçant x par 0 dans l'équation fonctionnelle que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Si $f(0) = 1$, on dérive l'équation par rapport à y puis on fixe $x = 0$, ce qui donne $f'(x+y) = f'(x)f(y)$, puis $f'(y) = f'(0)f(y)$. En notant $k = f'(0)$, f est donc solution du problème de Cauchy associé à l'équation différente $y' = ky$, avec $y(0) = 1$. Ce problème admet pour unique solution $y : x \mapsto e^{kx}$ (la constante K de résolution de l'équation différentielle vaut 1 à cause de la condition $y(0) = 1$), d'où la proposition. $\square$

5.3 Méthode d'Euler pour la résolution approchée d'équations différentielles

La méthode d'Euler est une méthode de résolution approchée des équations différentielles du premier ordre. Elle ne fournira donc jamais de solutions exactes, mais permet néanmoins de se faire une idée de l'allure des courbes intégrales. Le principe est d'approcher une solution de l'équation par sa tangente sur de petits intervalles, à partir d'une condition initiale. Considérons une équation de la forme $y' + a(x)y = b(x)$, et supposons qu'on impose $y(0) = 0$. On a alors $y'(0) = b(0)$, et on approchera donc y par la doite d'équation $y = b(0)x$ au voisinage de 0. En pratique, on se donne un pas h, par exemple $h = 0.1$, et on considère la première approximation valable sur $[0; 0.1]$. En 0.1, on peut maintenant calculer une valeur approchée de $y(0.1)$ grace à l'approximation précédente, et en déduire une valeur approchée de $y'(0.1)$ via l'équation différentielle, qui permet de faire une nouvelle approximation sur $[0.1; 0.2]$, et ainsi de suite. Bien entendu, plus on s'éloigne du point de départ, moins le résultat est précis, mais la méthode peut donner des résultats intéressants en pratique.

Exemple : construction de la fonction exponentielle.

Appliquons cette méthode à l'équation $y' = y$, avec $y(0) = 1$. Prenons un pas de la forme $h = \dfrac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Comme on impose $y(0) = 1$, on a $y'(0) = 1$, donc on approche y sur $\left[0; \dfrac{1}{n}\right]$ par la droite d'équation $y = 1 + x$. On a donc $y\left(\dfrac{1}{n}\right) \simeq 1 + \dfrac{1}{n}$, d'où $y'\left(\dfrac{1}{n}\right) \simeq 1 + \dfrac{1}{n}$. L'équation de la tangente approchée en ce point est alors $y = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\left(x - \dfrac{1}{n}\right) + 1 + \dfrac{1}{n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\left(x + 1 - \dfrac{1}{n}\right)$. En $\dfrac{2}{n}$, on a alors $y\left(\dfrac{2}{n}\right) \simeq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2$, etc. On montre par récurrence que $y\left(\dfrac{p}{n}\right) \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$. En effet, c'est vrai pour $p = 1$, et en le supposant vrai pour un entier p, l'équation de la tangente approchée en $\dfrac{p}{n}$ sera $y = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^p \left(x - \dfrac{p}{n} + 1\right)$, dont la valeur en $\dfrac{p+1}{n}$ est $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{p+1}$. En admettant que les courbes ainsi obtenues vont effectivement se rapprocher de celle de l'exponentielle quand n tend vers $+\infty$ (le pas tendant alors vers 0), on peut obtenir la propriété suivante pour l'exponentielle, qui sera démontrée plus tard dans le cours : $e^x = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. Exemples de courbes obtenues par la méthode d'Euler, pour $n = 2$ et $n = 10$ (en rouge, l'exponentielle, en vert la courbe obtenue avec $n = 2$ et en bleu celle obtenue avec $n = 10$).



0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
0
1
2
3