Chapitre 9 : Dénombrement

PTSI B Lycée Eiffel

10 janvier 2018

Toute chose est nombre.

Pythagore.

Il y a trois sortes de mathématiciens :
ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas compter.

Introduction

La combinatoire, science du dénombrement, sert comme son nom l'indique à compter. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensembles bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main. Le dénombrement n'a pas en soi énormément d'intérêt, mais trouvera toute son utilité ensuite en probabilités : dans le cadre des probabilités finies, la probabilité d'un évènement se calcule en divisant le nombre de cas favorables par le nombre total de cas possibles, ce qui suppose qu'on sache calculer les nombres de cas en question.

Objectifs du chapitre :

- être capable d'analyser correctement un énoncé pour choisir le bon type d'outil de dénombrement, et mener un raisonnement combinatoire clair et rigoureux
- manipuler sans hésitation les coefficients binomiaux

Quelques exemples de problèmes faisant intervenir les objets que nous allons étudier dans ce cours :

- Un tirage de Loto consiste à tirer sept boules dans une urne en contenant 49 (numérotées de 1 à 49). Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- Il y a 48 élèves dans la classe. Quelle est la probabilité qu'il y en ait (au moins) deux parmi eux qui soient nés le même jour de l'année ?
- On veut répartir les 48 élèves d'une classe en 16 trinômes de colles. Combien y a-t-il de répartitions possibles (l'ordre des trinômes ainsi que l'ordre des élèves au sein de chaque trinôme n'étant pas important) ?

1 Cardinaux d'ensembles finis

Définition 1. Un ensemble E est **fini** s'il est en bijection avec l'ensemble $\{1; 2; \dots ; n\}$, pour un entier naturel n. Cet entier n est alors unique. Il est appelé **cardinal** de l'ensemble E, et on le note $card(E)$, ou $|E|$, ou encore $\sharp E$.

Remarque 1. Cela correspond bien à la notion intuitive d'ensemble dont on peut compter les éléments. En effet, une bijection de E vers $\{1; \dots ; n\}$ est simplement une façon d'étiquetter les éléments de E avec les numéros 1, 2, ..., n.

Proposition 1. Soit E un ensemble fini et F un sous-ensmble de E, alors F est un ensemble fini, et $|F| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration. Cette propriété, comme souvent en ce qui concerne les ensembles finis, est assez évidente d'un point de vue intuitif, mais pas si simple à démontrer correctement. Nous nous en tiendrons au point de vue intuitif. □

Proposition 2. Soient E et F deux ensembles finis. Si E et F sont en bijection l'un avec l'autre, ils ont même cardinal.

Démonstration. Il existe par hypothèse une bijection f de E vers F. De plus, F étant fini, notons n son cardinal, il existe alors une bijection g de F dans $\{1; \dots ; n\}$. L'application $g \circ f : E \to \{1; \dots ; n\}$ est une composée d'applications bijectives, donc est bijective, ce qui prouve que E est de cardinal n. □

Proposition 3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble fini E. Alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Démonstration. Commençons par constater que dans le cas où les deux ensembles A et B sont disjoints, on a $|A \cup B| = |A| + |B|$. Vous voulez une démonstration ? Soit f une bijection de A dans $\{1; \dots ; n\}$ et g une bijection de B dans $\{1; \dots ; p\}$, n et p étant les cardinaux respectifs de A et de B. On peut alors construire une bijection h de $A \cup B$ vers $\{1; \dots ; n+p\}$ en posant $\forall x \in A$, $h(x) = f(x)$ et $\forall x \in B$, $h(x) = g(x)+p$ (intuitivement, cela revient à garder pour les éléments de A la numérotation donnée par l'application f, et à décaler pour les éléments de B la numérotation donnée par g, de façon à ne pas utiliser deux fois les mêmes numéros). Une fois ce fait admis, constatons que $A \cup B$ est l'union disjointe des trois ensembles $A \backslash B$, $B \backslash A$ et $A \cap B$. On a donc, en utilisant le résultat que nous venons de démontrer, $|A \cup B| = |A \backslash B| + |B \backslash A| + |A \cap B|$. Or, A étant union disjointe de $A \backslash B$ et de $A \cap B$, on a également $|A| = |A \backslash B| + |A \cap B|$, ou encore $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$. De même, $|B \backslash A| = |B| - |A \cap B|$, donc on obtient $|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Théorème 1. Formule du crible de Poincaré.

Soient A_1, A_2, ..., A_n des sous-ensembles finis d'un même ensemble E, alors

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Proposition 4. La formule de Poincaré étant assez peu lisible, voici ce que ça donne pour $n = 3$ et $n = 4$:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$

Démonstration. La preuve de la formule générale, assez technique, se fait par récurrence. On se contentera de prouver la formule pour $n = 3$ en partant de la proposition précédente : $|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| + |A \cap C \cap B \cap C|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Exemple : Dans un lycée de 300 élèves, 152 savent jouer au poker, 83 au tarot et 51 au bridge. De plus, 24 savent jouer à la fois au poker et au tarot, 14 au poker et au bridge, et 8 au tarot et au bridge. Enfin, 3 élèves maitrisent les trois jeux de cartes. Le nombre d'élèves jouant aux cartes est alors de $152 + 83 + 51 - 24 - 14 - 8 + 3 = 243$.

Proposition 5. Soit A un sous-ensemble fini d'un ensemble fini E, alors $|\bar{A}| = |E| - |A|$.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule pour une union : E est union disjointe de A et de $\bar{A}$, donc $|E| = |A| + |\bar{A}|$. □

Proposition 6. Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini, et $|E \times F| = |E| \times |F|$.

Démonstration. Pas de preuve rigoureuse pour celui-ci, simplement une idée de la façon dont ça marche. Soit n le cardinal de E, et $e_1, e_2, \dots, e_n$ ses éléments, p le cardinal de F et $f_1, \dots, f_p$ ses éléments. on peut placer les éléments de $E \times F$ dans un tableau de la façon suivante :

	e_1	e_2	$\dots$	e_n
f_1	(e_1, f_1)	(e_2, f_1)	$\dots$	(e_n, f_1)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
f_p	(e_1, f_p)	(e_2, f_p)	$\dots$	(e_n, f_p)

Il y bien $n \times p$ éléments dans le tableau, donc dans $E \times F$. □

2 Listes, arrangements et combinaisons

Définition 2. Soit E un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}$. Une ***p*-liste** d'éléments de E, ou p-uplet d'éléments de E, est simplement un élément de E^p.

Remarque 2. On peut très bien avoir plusieurs fois le même élément dans une p-liste. Par ailleurs, l'ordre des éléments de la p-liste est important.

Proposition 7. Le nombre de p-listes dans un ensemble de cardinal n vaut n^p.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de cardinal du produit vue un peu plus haut : comme $|E \times F| = |E| \times |F|$, on a $|E^p| = |E|^p$, ce qui prouve bien la propriété. □

Exemple : On tire dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10 quatre boules successivement avec remise. Le nombre de tirages possibles est de $10^4 = 10\ 000$ (il y a répétition possible à cause des remises, et l'ordre est important).

Remarque 3. Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est aussi le nombre d'applications de l'ensemble $\{1; \dots; p\}$ vers cet ensemble. En effet, se donner une telle application f revient à se donner les valeurs des images $f(1)$, $f(2)$, …, $f(p)$, c'est-à-dire à se donner une liste de p éléments de E.

Définition 3. Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **arrangement** de p éléments de E une p-liste d'éléments distincts de E.

Remarque 4. L'ordre des éléments est toujours important, par contre on ne peut plus avoir de répétition d'élément dans un arrangement.

Proposition 8. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$, le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments vaut $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$.

Démonstration. Contentons-nous de l'idée intuitive : lorsqu'on construit un arrangement, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième, ..., $n-p+1$ pour le $p$ème, soit au total $n(n-1)\times(n-p+1) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)\dots 2\times 1}{n(n-1)\dots 2\times 1} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. □

Exemple : On reprend la même urne que précédemment, mais on tire les quatre boules successivement sans remise. Le nombre de tirages possibles est désormais de $\dfrac{10!}{6!} = 10\times 9\times 8\times 7 = 5\ 040$.

Remarque 5. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est également le nombre d'applications injectives de $\{1;\dots;p\}$ dans E.

Définition 4. Un arrangement de n éléments dans un ensemble à n éléments est aussi appelé **permutation**. Il y a donc $n!$ permutations dans un ensemble à n éléments.

Exemple : Le nombre d'anagrammes d'un mot peut se calculer à l'aide de permutations. Il faut simplement diviser le nombre total du permutations du mot par $k!$ chaque fois qu'une même lettre apparait k fois dans le mot (ainsi, s'il y a trois E dans le mot, on divise par $3!$ car les permutations qui se contentent d'échanger les E entre eux ne modifient pas l'anagramme). Par exemple, le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT est $\dfrac{12!}{3!\times 2!\times 2!}$.

Remarque 6. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est le nombre d'applications bijectives de cet ensemble dans lui-même.

Définition 5. Une **combinaison** de p éléments dans un ensemble fini E à n éléments est un sous-ensemble à p éléments de E.

Définition 6. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$, on appelle **coefficient binomial** d'indices n et p le nombre $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ (qui se lit « p parmi n »).

Remarque 7. On pose souvent $\dbinom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

Proposition 9. Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\dbinom{n}{p}$.

Démonstration. En effet, une combinaison n'est rien d'autre qu'un arrangement dans lequel on a enlevé l'importance de l'ordre. Autrement dit, chaque combinaison apparait $p!$ fois quand on dénombre les arrangements (puisqu'il y a $p!$ façons d'ordonner un ensemble à p éléments), donc le nombre de combinaisons à p éléments vaut $\dfrac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \dbinom{n}{p}$. □

Exemple : Toujours dans la même urne, on tire désormais quatre boules simultanément. Le nombre de tirages est $\dbinom{10}{4} = \dfrac{10!}{6!\times 4!} = 210$.

Remarque 8. On peut encore une fois interpréter ceci à l'aide d'applications : le nombre de combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1;\dots;p\}$ dans E. En effet, se donner une application strictement croissante f est équivalent à se donner le sous-ensemble $\{f(1);f(2),\dots;f(p)\}$ (l'ordre étant imposé par la croissance de l'application).

Un petit tableau pour résumer les cas d'utilisations de ces trois outils de dénombrement :

	L'ordre n'est pas important	L'ordre est important
Répétitions possibles		Listes $\rightarrow$ puissances
Répétition interdites	Combinaisons $\rightarrow$ coefficients binômiaux	Arrangements $\rightarrow$ quotient de factorielles

3 Propriétés des coefficients binomiaux

Proposition 10. Quelques propriétés des coefficients binomiaux, utiles pour les calculs :

- $\forall n \geqslant 2$, $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- $\forall k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (propriété de symétrie).
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ (relation de Pascal).

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de reprendre la définition des coefficients binomiaux : $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$; $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

La propriété de symétrie est facile aussi : $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. Il y a également une interprétation combinatoire de ce résultat : choisir un sous-ensemble de k éléments dans un ensemble à n éléments est équivalent à choisir son complémentaire, qui est constitué de $n-k$ éléments, donc il y a autant de sous-ensembles à k éléments et à $n-k$ éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour la troisième, $k\binom{n}{k} = \frac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, et $n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, les deux quantités sont bien égales.

Enfin, la formule de Pascal : $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ $= \frac{(n-k) \times (n-1)! + k \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. La encore, il y a une interprétation combinatoire. Soit E un ensemble à n éléments et x un élément fixé de E. Les sous-ensembles de E à k éléments, au nombre de $\binom{n}{k}$, se répartissent en deux catégories : ceux qui contiennent x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ puisqu'il reste $k-1$ éléments à choisir parmi les $n-1$ restants dans E une fois x choisi ; et ceux qui ne contiennent pas x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$ puisqu'il reste cette fois-ci k éléments à choisir parmi les $n-1$ restants (on n'en a encore choisi aucun). D'où la formule. $\square$

Triangle de Pascal : La relation de Pascal permet de calculer les valeurs des coefficients binomiaux par récurrence, en les répartissant sous forme d'un tableau triangulaire :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	6	4	1				
$n=5$	1	5	10	10	5	1			
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
$n=8$	1	8	28	56	56	56	28	7	1

Pour obtenir un coefficient du tableau, on fait la somme de celui qui est au-dessus de lui, et de celui qui est à gauche de celui-ci.

Théorème 2. Formule du binôme de Newton.
Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque 9. On peut obtenir à partir de cette formule le développement d'une différence : $(b-a)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k b^{n-k}$. En pratique, il suffit d'alterner les signes.

Exemple : $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. L'ordre est inversé par rapport à celui de la formule, mais c'est la façon habituelle d'écrire le développement. Autre exemple : $(1-2x)^5 = 1 - 5\times 2x + 10\times(2x)^2 - 10\times(2x)^3 + 5\times(2x)^4 - (2x)^5 = 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^5 - 32x^5$.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur l'entier n. Pour $n=0$, la formule du binome dit simplement que $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$, ce qui est vrai (on a 1 de chaque côté). Supposons la formule vraie au rang n, on a alors $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ par hypothèse de récurrence, donc en développant le $a+b$ et en le faisant rentrer dans la somme, on obtient $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$. Effectuons un changement d'indice en remplaçant k par $k+1$ dans la première somme (on ne touche à rien dans la deuxième) : $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$ (on a isolé un terme dans chaque somme pour pouvoir regrouper les sommes). Maintenant, on reconnait la formule de Pascal dans la somme, donc $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$. Il ne reste plus qu'à remettre les deux termes isolés dans la somme pour obtenir la formule au rang $n+1$, ce qu'on peut faire puisqu'ils sont justement égaux aux termes manquants pour $k=0$ et $k=n+1$. □

Proposition 11. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n.

Démonstration. Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est le nombre de sous-ensembles de E. Or, on sait que, pour tout entier k, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E à k éléments, ce qui fait au total $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ sous-ensembles. Cette somme n'est rien d'autre qu'un cas particulier de formule du binôme, pour $a=b=1$, donc elle vaut $(1+1)^n = 2^n$.

Une autre démonstration possible utilise le fait (démontré dans un chapître antérieur) que $\mathcal{P}(E)$ est en bijection avec l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$ (via la fonction caractéristique). En découle que $|\mathcal{P}(E)| = |\{0,1\}|^n = 2^n$.

Une troisième démonstration pour la route, par récurrence en utilisant la relation de Pascal. Le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k} = 2^0$ est trivial. Supposons que la formule reste vraie au rang n, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}+\sum_{k=-1}^{n}\binom{n}{k} = 2\times 2^n = 2^{n+1}$ puisque les coefficients binomiaux sont nuls pour $k=-1$ et pour $k=n+1$. $\square$

Il est maintenant temps de répondre aux trois questions posées en début de chapitre :

- C'est une application directe du cours, il y a $\dbinom{49}{7} = 85\ 900\ 584$ grilles différentes au Loto.
- Le nombre de choix possibles pour les 48 dates de naissance des élèves de la classe est 365^{48} puisqu'on a 365 dates possibles pour chaque élève. Si on ne veut **pas** de répétition (donc des élèves tous nés à des dates distinctes), il n'y a plus que $\dfrac{365!}{317!}$ possibilités. Autrement dit, la probabilité que tous les élèves soient nés à des dates différentes vaut $\dfrac{\frac{365!}{317!}}{365^{47}} \simeq 0.039$. La probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour vaut donc environ $1-0.039 = 0.961$. L'existence d'anniversaires simultanés est pratiquement certaine.
- Pour constituer le premier trinôme, il faut choisir 3 élèves parmi les 48 élèves de la classe. Pour le deuxième, on choisit 3 élèves parmi les 45 restants, et ainsi de suite jusqu'à avoir à prendre 3 élèves parmi les 3 derniers pour le dernier trinôme (autant dire qu'on n'a plus le choix). Reste à diviser tous ces choix par 16!, le nombre d'ordres différents possibles qu'on peut avoir sur les 16 trinômes, soit $\dbinom{48}{3}\times\dbinom{45}{3}\times\dbinom{42}{3}\times\dbinom{39}{3}\times\dbinom{36}{3}\times\dbinom{33}{3}\times\dbinom{30}{3}\times\dbinom{27}{3}\times\dbinom{24}{3}\times\dbinom{21}{3}\times\dbinom{18}{3}\times\dbinom{15}{3}\times\dbinom{12}{3}\times\dbinom{9}{3}\times\dbinom{6}{3}\times\dbinom{3}{3}\times\dfrac{1}{16!}$ répartitions possibles. Si on écrit tout sous forme de quotient de factorielles, ça se simplifie beaucoup pour laisser $\dfrac{48!}{(3!)^{16}\times 16!}$ (qui est accessoirement un nombre gigantesque). On peut retrouver ce résultat directement : on choisit un ordre sur les 48 élèves (d'où le numérateur), puis on découpe la liste ordonnée de 48 élèves en 16 paquets de 3. L'ordre dans chacun des 16 paquets n'a aucune importance (on divise donc 16 fois de suite par 3!) et l'ordre des 16 paquets n'a pas non plus d'importance, donc on divise encore par 16!.