TD n$^{\text{o}}$ 9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

26 avril 2018

Exercice 1

1. Il s'agit d'une famille de quatre vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, il suffit donc de prouver qu'elle est libre pour qu'il s'agisse d'une base. Supposons donc que $a(1,0,0,0) + b(0,1,1,0) + c(1,0,0,-1) + d(1,1,-1,0) = 0$. La dernière coordonnée donne immédiatement $c = 0$, et il nous reste alors les trois équations $a + b = b + d = b - d = 0$. La somme et la différence des deux dernières conditions impliquent que $b = d = 0$, et on en déduit sans problème que $a = 0$. La famille est donc bien libre, et c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Puisque la famille $(u_1, u_2, u_, u_4)$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$, on peut directement dire que $F + G = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$. Par ailleurs, les deux sous-espaces F et G sont de dimension 2 (ils sont engendrés par une famille libre de deux vecteurs), donc $\dim(F) + \dim(G) = 4$, ce qui suffit à prouver que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

3. (a) Il faut vérifier que f est une application linéaire : en posant $u = (x, y, z, t)$ et $v = (x', y', z', t')$, on a $f(\lambda u+v) = (2\lambda x+x'-\lambda y-y'+\lambda z+z'+2\lambda t+2t', \lambda y+y'+\lambda z+z', \lambda y+y'+\lambda z+z', 0) = \lambda(2x-y+z+2t, y+z, y+z, 0)+(2x'-y'+z'+2t', y'+z', y'+z', 0) = \lambda f(u)+f(v)$. L'application est donc linéaire, il s'agit bien d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Pour déterminer le noyau, on résout le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & - & y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$. Ce n'est pas trop compliqué : $z = -y$, on reporte dans la première équation pour obtenir $2(x - y + t) = 0$, soit $t = y - x$, et donc $\ker(f) = \{(x, y, -y, y - x) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1,0,0,-1); (0,1,-1,1))$. Le premier vecteur de notre famille génératrice étant égal à u_3, il appartient certainement à G. De plus, $(0,1,-1,1) = (1,1,-1,0) - (1,0,0,-1) = u_4 - u_3$ appartient aussi à G. On en déduit que $\ker(f) \subset G$ (toutes les combinaisons linéaires de nos deux vecteurs seront aussi des éléments de G). Or, $\dim(\ker(f)) = 2 = \dim(G)$ (les deux vecteurs obtenus n'étant manifestement pas proportionnels), donc $\ker(f) = G$.

   (c) On calcule les images des vecteurs de la base caconique : $\text{Im}(f) = \text{Vect}((2,0,0,0); (-1,1,1,0); (1,1,1,0); (2,0,0,0))$. On peut bien sûr supprimer le dernier vecteur qui est inutile, mais aussi le deuxième : $(-1,1,1,0) = (1,1,1,0) - (2,0,0,0)$. Quitte à diviser le premier vecteur par deux, on a donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1,0,0,0); (1,1,1,0))$. Le premier vecteur est égal à u_1, le deuxième à $u_1 + u_2$, ils appartiennent tous les deux à F et on conclut exactement comme dans la question précédente que $\text{Im}(f) = F$.

   (d) Calculons donc bêtement $f \circ f(x, y, z, t) = f(2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0) = (2(2x - y + z + 2t) - (y + z) + (y + z), y + z + y + z, y + z + y + z, 0) = 2f(x, y, z, t)$ (le calcul est vraiment débile ici), donc en effet $f^2 = 2f$. On peut en déduire que $\left(\dfrac{f}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{4}f = \dfrac{f}{2}$, ce qui revient à dire que $\dfrac{f}{2}$ est un projecteur (sur F parallèlement à G, la division par deux n'ayant aucun effet sur le noyau et l'image). L'application f est alors la composée de cette projection par une homothétie de rapport 2.

(e) On peut simplement calculer $(f - id)^2 = f^2 - 2f + id = id$, donc $g^2 = id$ et g est une symétrie. En fait on peut constater très intelligemment que $g = 2 \times \frac{f}{2} - id$, ce qui prouve que g est la symétrie ayant les mêmes éléments caractéristiques que le projecteur $\frac{f}{2}$, autrement dit la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 2

1. On peut normaliser sur $\mathbb{R}$ pour obtenir l'équation homogène $y' - \frac{x}{x^2+1}y = 0$, dont les solutions sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = K\sqrt{x^2+1}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
2. Cherchons donc une solution g telle que $g(x) = ax + b$. On a alors $g'(x) = a$, et la fonction est solution si $a(x^2+1) - ax^2 - bx = x + 1$, soit $-bx + a = x + 1$, ce qui fonctionne assez facilement en posant $a = 1$ et $b = -1$. Autrement dit, $g(x) = x - 1$ convient, et les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions de la forme $y_K : x \mapsto K\sqrt{x^2+1} + x - 1$, avec $K \in \mathbb{R}$.
3. On calcule $y_K'(x) = 1 + \frac{Kx}{\sqrt{x^2+1}}$, donc $y_K(1) = K\sqrt{2}$, et $y_K'(1) = 1 + \frac{K}{\sqrt{2}}$. La tangente demandée a donc pour équation $y = \left(1 + \frac{K\sqrt{2}}{2}\right)(x-1) + K\sqrt{2} = x + \frac{K\sqrt{2}}{2}x + \frac{K\sqrt{2}}{2} - 1$.
4. Il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle y ne dépend plus de K dans l'équation précédente. C'est le cas pour $x = -1$, on a alors $y = -2$, ce qui prouve que toutes nos tangentes se coupent au point $A(-1, -2)$.
5. (a) On sait que $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, donc $\sqrt{1 + x + \frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.

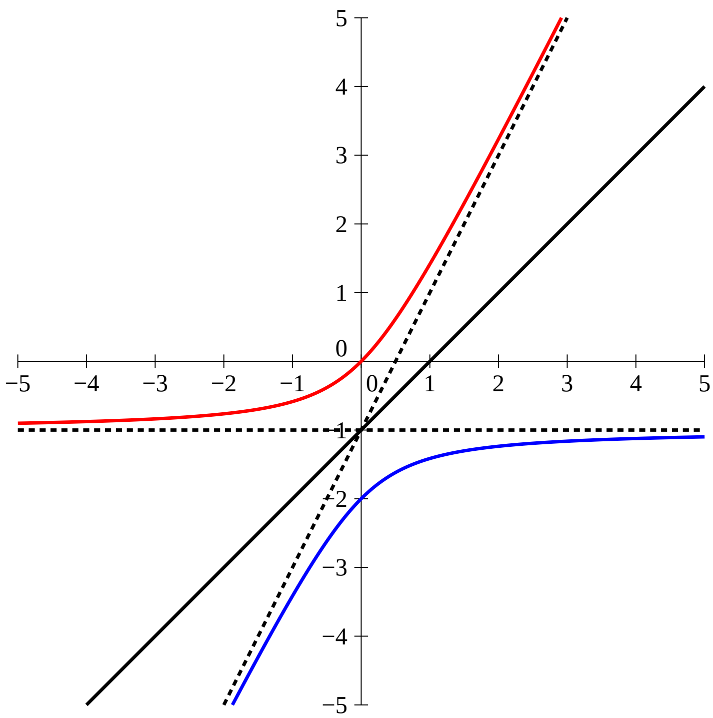
   (b) Posons donc $h = x - 1$, qui tendra vers 0 quand x tend vers 1, et calculons $y_K(x) = y_K(1+h) = 1 + h - 1 + K\sqrt{(1+h)^2+1} = h + K\sqrt{2}\sqrt{1 + h + \frac{h^2}{2}}$. À l'aide du calcul précédent, on obtient alors $y_K(1+h) = h + K\sqrt{2} + \frac{K\sqrt{2}}{2}h + \frac{K\sqrt{2}}{8}h^2 + o(h^2)$. Si on tient à écrire un vrai DL1, on peut le recopier sous la forme $y_K(x) \underset{x\to 1}{=} K\sqrt{2} + \left(1 + \frac{K\sqrt{2}}{2}\right)(x - 1) + \frac{K\sqrt{2}}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

   (c) L'écart entre la courbe et la tangente est équivalent à $\frac{K\sqrt{2}}{8}(x-1)^2$ (sauf bien sûr si $K = 0$ mais dans ce cas la fonction y_K est affine et toujours confondue avec sa tangente), dont le signe dépend de celui de K. Si $K > 0$, la courbe sera localement au-dessus de sa tangente, si $K < 0$, elle sera localement en-dessous de la tangente.
6. Nous posons bien sûr $X = \frac{1}{x}$, et calculons $f(x) = \frac{1}{X} - 1 + K\sqrt{1 + \frac{1}{X^2}}$. On suppose $X > 0$ pour sortir un facteur $\frac{1}{X}$ de la racine carrée, et ainsi $Xf(x) = 1 - X + K\sqrt{1+X^2} = 1 - X + K\left(1 + \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)\right) = 1 + K - X + \frac{K}{2}X^2 + o(X^2)$, soit $f(x) = \frac{1+K}{X} - 1 + \frac{K}{2}X + o(X) = (K+1)x - 1 + \frac{K}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. On élimine encore une fois le cas $K = 0$ (où la droite $y = x - 1$ est bien entendue asymptote puisqu'elle est confondue avec la courbe). Si $K \neq 0$, la droite d'équation $y = (K+1)x$ est asymptote à la courbe en $+\infty$, et comme l'écart avec $f(x)$ est

équivalent à $\dfrac{K}{2x}$, la courbe $\mathcal{C}_K$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ lorsque $K > 0$, elle est en-dessous sinon.

En $-\infty$, on ne sort pas un facteur $\dfrac{1}{X}$ de la racine carrée, mais un facteur $-\dfrac{1}{X}$. On trouve alors $f(x) = \dfrac{1-K}{X} - 1 - \dfrac{K}{2}X + o(X) = (1-K)x - 1 - \dfrac{K}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La droite d'équation $y = (1-K)x$ est donc asymptote oblique de ce côté, avec les mêmes conclusions que ci-dessus pour les positions relatives (le signe de x change, mais il y a un $-$ devant la constante, ça se compense).

7. La courbe $\mathcal{C}_0$ est une bête droite, pas besoin de s'attarder longuement dessus. Pour tracer $\mathcal{C}_1$, il serait bon de connaitre les variations de $y_1 : x \mapsto x - 1 + \sqrt{x^2+1}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y_1'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Or, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x$, donc le numérateur de notre dérivée est toujours strictement positif, la fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On connait déjà ses asymptotes. Un calcul rigoureusement identique prouve que y_{-1} est elle-aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Voici les courbes ($\mathcal{C}_1$ en rouge, $\mathcal{C}_0$ en noir, $\mathcal{C}_{-1}$ en bleu) :



Exercice 3

1. Il y a à peine besoin de calculer pour obtenir $F = \text{Vect}((1,0,0);(0,1,1))$, et $G = \text{Vect}((1,1,2))$. Chacune des familles obtenues est de façon tout aussi immédiate une base de son sous-espace vectoriel.

2. Si un vecteur $u(x,y,z)$ appartient à la fois à F et G, alors par définition $y = z$, $x = y$ et $z = 2y$, ce qui impose très facilement $x = y = z = 0$. Autrement dit $F \cap G = \{0\}$. Comme par ailleurs $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 1$, la somme des dimensions de ces deux sous-espaces est égale à celle de $\mathbb{R}^3$, ce qui suffit à prouver que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

3. Cherchons à décomposer un vecteur $u(x,y,z)$ sous la forme $u = a(1,0,0) + b(0,1,1) + c(1,1,2)$ (ce qui est possible, et de façon unique, dans la mesure où F et G sont supplémentaires). On

doit donc résoudre le système $\begin{cases} a & + & c & = & x \\ & b & + & c & = & y \\ & b & + & 2c & = & z \end{cases}$. La différence des deux dernières équations donne immédiatement $c = z - y$, dont on déduit $b = 2y - z$ et $a = x + y - z$. On peut donc écrire $u = u_F + u_G$, avec $u_F = a(1,0,0) + b(0,1,1) = (x+y-z, 2y-z, 2y-z) \in F$, et $u_G = c(1,1,2) = (z-y, z-y, 2z-2y) \in G$. Par définition, la projection sur F parallèlement à G est donnée par $p(u) = u_F = (x+y-z, 2y-z, 2y-z)$, et pour la symétrie on a $s(u) = u_F - u_G = (x+2y-2z, 3y-2z, 4y-3z)$. On peut aussi utiliser le fait que $s = 2p - id$ pour retrouver ce dernier résultat.

4. (a) On calcule aisément $q^2(x,y,z) = (x+y-z+y-y, y, y) = q(x,y,z)$, donc $q^2 = q$ et q est un projecteur.
   (b) Le système à résoudre est à la portée de la première grand-mère venue : $x + y - z = y = 0$ donne $y = 0$ et $x = z$, soit $\ker(q) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$.
   (c) Manifestement, $\dim(\ker(q)) = 1$, donc $\dim(F) + \dim(\ker(q)) = 3$. Par ailleurs, $(1,0,1) \notin F$ puisqu'il ne vérifie pas l'équation $z = y$ définissant le sous-espace F. On en déduit que $\ker(q) \cap F = \{0\}$, et donc que F et $\ker(q)$ sont bien supplémentaires.
   (d) Méthode classique : $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Vect}(q(1,0,0); q(0,1,0); q(0,0,1)) = \mathrm{Vect}((1,0,0); (1,1,1); (1,0,0))$. On peut se débarasser facilement du dernier vecteur. Les deux premiers sont par ailleurs des vecteurs de F (ils vérifient $z = y$), donc leurs combinaisons linéaires aussi, ce qui prouve que $\mathrm{Im}(q) \subset F$. Or, $\dim(\mathrm{Im}(q)) = 2$ d'après le théorème du rang, donc $\mathrm{Im}(q) = F$.
   (e) Si $u \in \ker(q)$, alors par définition $q(u) = 0$, et $p \circ q(u) = p(0) = 0$. Par ailleurs, si $u \in F = \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p)$, alors $p(u) = q(u) = u$ (puisque les deux applications sont des projecteurs), et $p \circ q(u) = q(u) = u$. Les deux applications q et $p \circ q$ coïncident donc sur des bases de $\ker(q)$ et de F, qu'on peut regrouper en une base de E puisque les sous-espaces sont supplémentaires. Celà suffit à assurer que $q = p \circ q$. On effectue exactement le même raisonnement pour prouver que $q \circ p = p$, avec cette fois les sous-espaces vectoriels F et $G = \ker(p)$ (qui sont eux aussi supplémentaires).
5. (a) On calcule (en exploitant la question précédente) $r^2 = (p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q + p + q = 2r$. L'application r n'est donc pas un projecteur.
   (b) On peut pour passer le temps écrire que $r^3 = r^2 \circ r = 2r \circ r = 2r^2 = 4r$, et deviner qu'on va avoir $r^n = 2^{n-1}r$, ce qui se prouve par une récurrence triviale.
   (c) Supposons donc que $u \in \mathrm{Im}(r - 2\,id)$. Il existe alors un vecteur v tel que $u = r(v) - 2v$, et on a alors $r(u) = r^2(v) - 2r(v) = 0$ puisque $r^2 = 2r$, ce qui prouve que $u \in \ker(r)$. C'est exactement pareil pour l'autre inclusion.
   (d) Ces deux espaces ont clairement une intersection réduite à 0 puisqu'on difficilement vérifier $r(u) = 0$ et $r(u) = 2u$ sans avoir $u = 0$. Par ailleurs, si u est un vecteur quelconque, on peut astucieusement écrire $u = u - \frac{1}{2}r(u) + \frac{1}{2}r(u)$. Dans cette décomposition, $\frac{1}{2}r(u) \in \mathrm{Im}(r) \subset \ker(r - 2\,id)$, et $u - \frac{1}{2}r(u) = -\frac{1}{2}(r(u) - 2u) \in \mathrm{Im}(r - 2\,id) \subset \ker(r)$, donc on a prouvé que $u \in \ker(r) + \ker(r - 2\,id)$. On a en fait prouvé en revenant à la définition (pour une fois) que nos deux noyaux sont supplémentaires.
   (e) On a déjà tout ce qu'il faut : d'après les calculs de la question précédente, $h(u) = u - \frac{1}{2}r(u)$. Comme $r(x,y,z) = p(x,y,z) + q(x,y,z) = (2x + 2y - 2z, 3y - z, 3y - z)$, on peut écrire explicitement $h(x,y,z) = \left(z - y, \frac{z-y}{2}, \frac{3(z-y)}{2}\right)$.

Exercice 4

1. La fonction arctan étant impaire, f est paire (le numérateur est impair, le dénominateur aussi). La fonction f est par ailleurs définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. Le cours nous dit que $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ au voisinage de 0, donc $f(x) = \frac{1}{x}(1 + x^2)\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right) = \frac{1}{x}\left(x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)\right) = 1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^3)$.

3. Puisque f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle y est dérivable après avoir été prolongée par continuité en posant $f(0) = 1$. De plus, $f'(0) = 0$, ce qui n'est évidemment guère surprenant pour une fonction paire. Enfin, $f(x) - 1 \sim \frac{2}{3}x^2 > 0$, donc la courbe sera au-dessus de sa tangente horizontale au voisinage de 0.

4. C'est hyper classique, on pose par exemple $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, g est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$, donc g est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Il suffit alors de calculer $g(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ pour conclure.

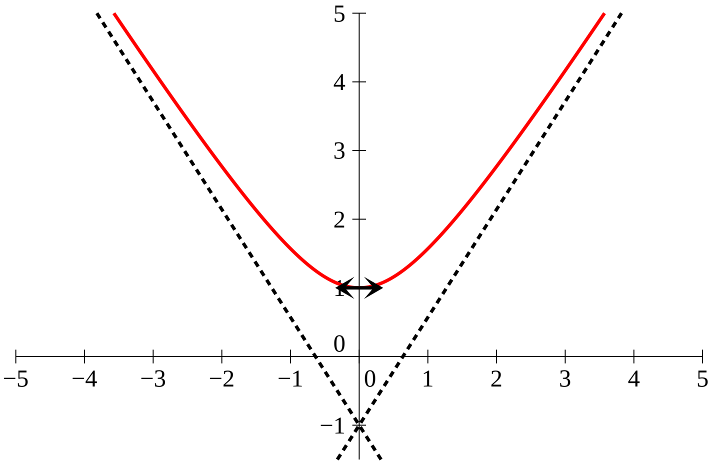
5. Commençons comme d'habitude par poser $X = \frac{1}{x}$ pour calculer $f(x) = \frac{(\frac{1}{X^2} + 1)\arctan(\frac{1}{X})}{\frac{1}{X}} = \frac{(1 + X^2)(\frac{\pi}{2} - \arctan(X))}{X}$, soit $Xf(x) = (1 + X^2)\left(\frac{\pi}{2} - X + \frac{1}{3}X^3 + o(X^4)\right) = \frac{\pi}{2} - X + \frac{\pi}{2}X^2 - \frac{2}{3}X^3 + o(X^3)$, dont on déduit que $f(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{\pi}{2x} - \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On observe bien la présence d'une asymptote oblique d'équation $y = \frac{\pi}{2}x - 1$, et $f(x)?\left(\frac{\pi}{2}x - 1\right) \sim \frac{\pi}{2x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, la courbe de f sera donc au-dessus de son asymptote dans un tel voisinage. En $-\infty$, le calcul précédent n'est plus directement valable car la formule de la question précédente ne marche que pour des valeurs strictement positives de x, mais on peut simplement utiliser la parité de f : on aura une asymptote oblique d'équation $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, et la courbe sera également au-dessus de cette asymptote sur un voisinage de $-\infty$.

6. La fonction h est définie et dérivable sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-1)^2 - (x^2+1)^2}{(x^2+1)(x^2-1)^2} = -\frac{4x^2}{(x^2+1)(x^2-1)^2}$, qui est toujours négatif. Par ailleurs, $h(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$ (calculs sans difficulté, et d'ailleurs inutile si on ne veut que le signe de la fonction h), et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$. On peut donc écrire le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
h	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

7. Caculons donc $f'(x) = \frac{2x^2\arctan(x) + x - (x^2+1)\arctan(x)}{x^2} = \frac{(x^2-1)\arctan(x) + x}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}h(x)$. Comme $x^2 - 1$ est toujours du même signe que $h(x)$, on en déduit que f' est toujours positive, et donc que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Bien entendu, par parité de f, cette dernière sera décroissante sur $]-\infty, 0[$.

8. On n'oublie bien sûr par les belles asymptotes :


5
4
3
2
1
0
−1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5