TD n^{o} 9 : révisions pour le DS7

PTSI B Lycée Eiffel

26 avril 2018

Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}^4$, où on considère les quatre vecteurs $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (1,0,0,-1)$ et $u_4 = (1,1,-1,0)$.

1. Prouver que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. On pose $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(u_3, u_4)$, montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
3. On définit une application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ par $f(x,y,z,t) = (2x - y + z + 2t, y + z, y + z, 0)$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer le noyau de f (on en donnera une base) puis vérifier que $\ker(f) = G$.
   (c) Déterminer l'image de f, puis vérifier que $\text{Im}(f) = F$.
   (d) Montrer que $f^2 = 2f$, et décrire f comme composée de deux applications linéaires classiques étudiées en cours.
   (e) Déduire du résultat précédent la nature de l'application $g = f - id$, et en préciser les éléments caractéristiques.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E) : (x^2+1)y' - xy = 1 + x$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer une fonction affine g solution de (E). En déduire l'ensemble des solutions de (E). On notera pour la suite $y_K(x) = g(x) + K\sqrt{x^2+1}$, et $\mathcal{C}_K$ la courbe intégrale correspondante, avec $K \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_K$ en son point d'abscisse 1.
4. Prouver que toutes les tangentes calculées ci-dessus se coupent en un même point lorsque K parcourt $\mathbb{R}$.
5. (a) Calculer le DL à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1 + x + \dfrac{x^2}{2}}$.
   (b) Calculer un DL à l'ordre 2 en 1 (et pas en 0 !) de y_K.
   (c) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_K$ et de sa tangente en 1 au voisinage de 1 (il se peut que ça dépende de K).
6. Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ de y_K, en déduire l'existence éventuelle d'asymptotes obliques pour les courbes $\mathcal{C}_K$ en $+\infty$. Que se passe-t-il en $-\infty$?
7. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ en tenant compte de tous les calculs effectués précédemment.

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, où on considère les deux sous-ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z - 2y = 0\}$.

1. Donner une base de chacun de ces deux sous-espaces vectoriels.
2. Prouver que $F \oplus G = E$.
3. On note p la projection sur F parallèlement à G. Donner l'expression explicite de $p(x, y, z)$ (expression qui n'est pas indispensable pour la suite de l'exercice). Donner également l'expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G (sans faire de calculs inutiles).
4. On note q l'endomorphisme de E (on ne demande pas de prouver que c'en est un) défini par $q(x, y, z) = (x + y - z, y, y)$.
   (a) Montrer que q est un projecteur.
   (b) Donner une base de $\ker(q)$.
   (c) Vérifier que $\ker(q)$ est un supplémentaire de F.
   (d) Montrer que $\text{Im}(q) = F$.
   (e) En déduire (si possible sans trop de calculs) que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
5. On note désormais $r = p + q$.
   (a) L'application r est-elle une projection ?
   (b) Exprimer r^n en fonction de r pour tout entier $n \geqslant 2$.
   (c) Montrer que $\text{Im}(r - 2\,id) \subset \ker(r)$ et $\text{Im}(r) \subset \ker(r - 2\,id)$.
   (d) Montrer que $\ker(r)$ et $\ker(r - 2\,id)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E.
   (e) Donner l'expression de la projection h sur $\ker(r)$ parallèlement à $\ker(r - 2\,id)$.

Exercice 4

On souhaite étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x^2 + 1)\arctan(x)}{x}$. On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x)$.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité et dérivable en 0. Donner l'équation de sa tangente en 0, et la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de cette tangente au voisinage de 0.
4. Montrer que, $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
5. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$, donner son équation ainsi que sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$. Que se passe-t-il en $-\infty$?
6. On pose $h(x) = \arctan(x) + \dfrac{x}{x^2 - 1}$. Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}^{+*}$.
7. En déduire les variations de f.
8. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.