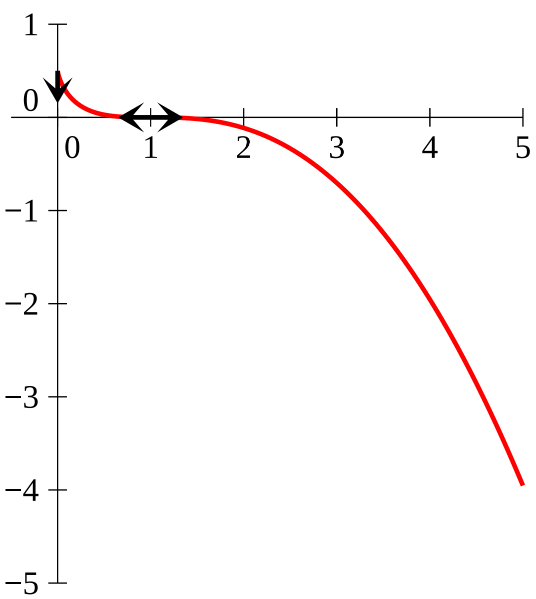
TD n$^{\text{o}}$ 8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

15 mars 2018

Exercice 1

1. La fonction g est définie, continue et dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0,+\infty[$ par théorèmes généraux. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ (par croissance comparé), donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{1}{2}$, on peut donc prolonger g par continuité en posant $g(0) = \dfrac{1}{2}$. On peut d'ailleurs calculer le taux d'accroissement de la fonction en 0 : $\tau(h) = \dfrac{g(h)-\frac{1}{2}}{h} = \ln(h) - \dfrac{h}{2}$. Ce taux d'accroissement ayant une limite infinie quand h tend vers 0, la fonction prolongée n'est pas dérivable en 0, mais on aura une tangente verticale à cet endroit de la courbe. La limite de g en $+\infty$ s'obtient en factorisant brutalement : $g(x) = x^2\left(\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2}\right)$. La parenthèse ayant pour limite $-\dfrac{1}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ (le premier terme tend vers 0 par croissance comparée), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. On peut passer à l'étude des variations : $g'(x) = \ln(x) + 1 - x$, expression qui n'a pas un signe évident. Dérivons donc à nouveau : $g''(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$, donc g' est strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, admettant en particulier un maximum égal à $g'(1) = 0$. Voilà qui tombe bien, la dérivée g' est donc négative sur $\mathbb{R}^{+*}$ (mais elle s'annule en 1), et la fonction g est donc strictement décroissante. On peut conclure avec une courbe où on fait bien figurer les deux tangentes remarquables (horizontale en 1, verticale en 0) :



2. On vient de voir que, si $x > 1$, $g(x) < 0$. Or, on constate facilement que $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^2-1} + \dfrac{1}{2}$, ce qui suffit à prouver que $f(x) < \dfrac{1}{2}$ (le dénominateur $x^2 - 1$ étant lui aussi strictement positif). Le fait que $f(x) > 0$ sur cet intervalle étant trivial, cette question est déjà terminée.

3. Calculons donc $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\frac{1}{x}\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}-1} = \dfrac{x \times (-\ln(x))}{1-x^2} = \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1} = f(x)$. Or, lorsque $x \in]0,1[$, $\dfrac{1}{x} \in]1,+\infty[$, donc $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. Remarquons en passant que le raisonnement effectué à la question précédente pouvait aussi facilement s'appliquer sur $]0,1[$.

4. On peut écrire $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \times \dfrac{\ln(x)}{x-1}$. Le deuxième quotient est le taux d'accroissement de la fonction ln en 1, il tend vers 1 (si on préfère on pose $X = x - 1$ pour se ramener à la limite classique du cours $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$), donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$ et la fonction f est prolongeable par continuité en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Le taux d'accroissement de f en 1 est alors égal à $\tau(h) = \dfrac{f(1+h) - \frac{1}{2}}{h} = \dfrac{\frac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} - \frac{1}{2}}{h} = \dfrac{2(1+h)\ln(1+h) - h(2+h)}{2h^2(2+h)}$. À l'aide de la formule donnée dans l'énoncé, développons le numérateur : $2(1+h)\left(h - \dfrac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)\right) - 2h - h^2 = 2h + 2h^2 - h^2 - h^3 + 2h^2\varepsilon(h) + 2h^3\varepsilon(h) - 2h - h^2 = -h^3 + 2h^2\varepsilon(h) + 2h^3\varepsilon(h)$, termes qui vont tous tendre gentiment vers 0 même après division par h^2. Bref, $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = 0$, ce qui prouve que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$.

Exercice 2

1. (a) Une question triviale, une : $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = x^2 - x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = x^2 - x + 1$.

   (b) Puisque $x^2 - x + 1$ est toujours positif (celà découle de la question précédente, histoire qu'on n'ait même pas besoin de calculer un discriminant), la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. La suite (u_n) est alors bien définie par récurrence triviale (il n'y a vraiment absolument rien à faire pour prouver l'hérédité).

   (c) Utilisons donc la première question : si $0 \leq x \leq 1$, alors $-\dfrac{1}{2} \leq x - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2}$, donc $0 \leq \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$, et $\dfrac{3}{4} \leq \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \leq 1$. On passe tout à la racine carrée pour obtenir $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq f(x) \leq 1$, ce qui prouve la stabilité de l'intervalle $[0,1]$ par f.

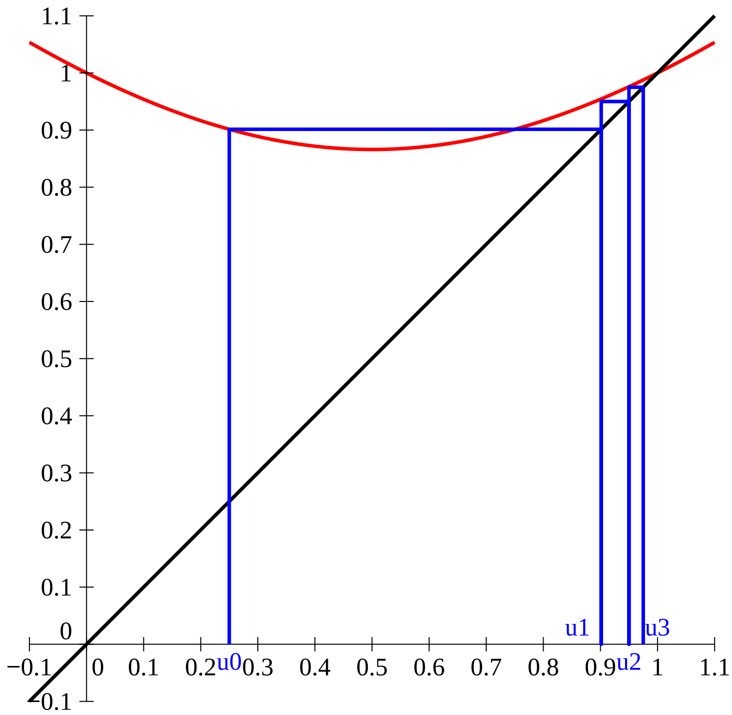
   (d) C'est une récurrence trivial en utilisant la stabilité de l'intervalle et l'hypothèse $u_0 \in]0,1[$.

2. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$, qui a le même signe que $2x - 1$. On a déjà calculé indirectement $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ plus haut, et les limites ne posent pas le moindre problème.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) On calcule donc $f(x) - x = \sqrt{x^2 - x + 1} - x = \dfrac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \dfrac{1 - x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$ en multipliant par la quantité conjuguée. Le dénominateur étant positif sur $]0, 1[$, $f(x) - x$ est du signe du numérateur, et donc positif sur $]0, 1[$, avec un point fixe pour $x = 1$.

(c) Même en prenant une échelle adaptée, on ne voit pas grand chose :



(d) Deux méthodes possibles qui vont mener à des résultats différents : on peut déjà remarquer à l'aide de la première question que $\sqrt{x^2 - x + 1} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (quel que soit le réel x), donc $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. De plus, si $x \in [0, 1]$, $2x - 1 \in [-1, 1]$, donc $|2x - 1| \leq 1$, et $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, majorant tout à fait convenable puisqu'il est strictement inférieur à 1. On peut obtenir mieux en dérivant une deuxième fois : $f''(x) = \dfrac{4\sqrt{x^2 - x + 1} - (2x - 1) \times \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}}{4(x^2 - x + 1)} = \dfrac{4(x^2 - x + 1) - (2x - 1)^2}{4(x^2 - x + 1)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3}{4(x^2 - x + 1)^{\frac{3}{2}}}$, qui est toujours positif. La dérivée f' est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, on en déduit que, $\forall x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

3. (a) On applique bien entendu l'IAF entre u_n et 1 pour obtenir immédiatement le résultat (toutes les hypothèses de l'IAF ont déjà été vérifiées), avec bien sûr $k = \dfrac{1}{2}$ ou $k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ selon le résultat obtenu à la question précédente.

(b) On prouve par récurrence que $|1 - u_n| \leq k^n|1 - u_0|$. L'inégalité est triviale au rang 0, et en la supposant vraie au rang n, on a $|1 - u_{n+1}| \leq k|1 - u_n| \leq k \times k^n|1 - u_0| = k^{n+1}|1 - u_0|$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.

(c) Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ (quel que soit le choix de k entre les deux valeurs proposées plus haut), et $|1 - u_n| \geq 0$, le théorèmes des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |1 - u_n| = 0$, et donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

(d) Sachant que $|1-u_0| \leq 1$, il suffit que $k^n \leq 10^{-2}$. Si on a choisi $k = \frac{1}{2}$, il suffit donc d'avoir $2^n \geq 10^2$, ce qui est le cas pour $n \geq 7$. Si on a choisi $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on sait que $3^4 = 81$, donc $(\sqrt{3})^9 \geq 81\sqrt{3} \geq 100$, et $n = 9$ convient.

Exercice 3

1. Le polynôme dérivé $P' = 3X^2 - 2X - \frac{39}{4}$ admet pour discriminant $\Delta = 4 + 3 \times 39 = 121 = 11^2$, et pour racines $X_1 = \frac{2-11}{6} = -\frac{3}{2}$ et $X_2 = \frac{2+11}{6} = \frac{13}{6}$. On va plutôt tester la première pour commencer : $P\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{117}{8} - 9 = \frac{-27-18+117-72}{8} = 0$, donc $-\frac{3}{2}$ est bien notre racine double. Le polynôme P étant de degré 3, il admet une autre racine qu'on peut déterminer à l'aide des relations coefficients-racines : la somme des trois racines (en comptant deux fois la racine double) est égale à $-(-1) = 1$, donc la troisième racine vaut $1 + 2 \times \frac{3}{2} = 4$, et le polynôme P étant unitaire, il se factorise sous la forme $P = \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 (X-4)$.
2. Notons $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ le polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines les nombres x, y et z. En exploitant les relations coefficients-racines, on sait que $a = -(x+y+z) = -2$ et $c = -xyz = \frac{1}{2}$. Enfin, on a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy+xz+yz}{xyz} = -\frac{b}{c}$, donc $b = -\frac{c}{2} = -\frac{1}{4}$, et $P = X^3 - 2X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$. Ce polynôme admet pour racine évidente $X = 2$: $P(2) = 8 - 8 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Même pas besoin de calculs pour le factoriser sous la forme $P = X(X-2) - \frac{1}{4}(X-2) = (X-2)\left(X^2 - \frac{1}{4}\right) = (X-2)\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)$. On a donc trouvé les trois racines du polynôme P et donc les valeurs de nos trois inconnues, qui peuvent toutefois être permutées indiféremment. On en déduit que
$$\mathcal{S} = \left\{\left(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right); \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)\right\}$$

Exercice 4

1. Calculons donc $I_0 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\, dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.
2. Calculons à nouveau $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int_0^1 1\, dx = 1$, donc $I_1 = 1 - I_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.
3. C'est à peine différent : $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x} + \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\, dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^x+1)}{1+e^x}\, dx = \int_0^1 e^{-nx}\, dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{n}$.
4. On peut utiliser la méthode classique : $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1-e^x)}{1+e^x}\, dx$ (même calcul et factorisation qu'à la question précédente). Or, e^{-nx} et $1+e^x$ sont toujours positifs, et $1-e^x$ est négatif lorsque x varie dans l'intervalle $[0,1]$. On en déduit que $I_{n+1} - I_n \leq 0$, donc la suite (I_n) est décroissante. Comme elle est trivialement minorée par 0 puisque (I_n) est une intégrale de fonction positive, elle converge donc.

5. Il suffit de dire que $0 \leq I_n \leq I_n + I_{n+1} = \dfrac{1 - e^{-n}}{2n}$ pour conclure que cette limite est nulle à l'aide du théorème des gendarmes (la majorant tandant facilement vers 0).