TD n°8 : révisions pour le DS6

PTSI B Lycée Eiffel

15 mars 2018

Exercice 1

On pose $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$ et $g(x) = x\ln(x) - \dfrac{x^2-1}{2}$.

1. Étudier le plus complètement possible la fonction g (on tracera une allure de courbe).
2. En déduire que, $\forall x \in]1, +\infty[$, $0 < f(x) < \dfrac{1}{2}$.
3. En calculant et en simplifiant $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, montrer que l'encadrement précédent reste vrai sur $]0, 1[$.
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Est-elle dérivable en 1 (on pourra utiliser le fait que $\ln(1+h) = h - \dfrac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$) ?

Exercice 2

On considère dans cet exercice une suite (u_n) définie par un premier terme $u_0 \in]0, 1[$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$. On posera $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. (a) Montrer que $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.
   (b) En déduire le domaine de définition de f, puis prouver que la suite (u_n) est bien définie.
   (c) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f.
   (d) Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. (a) Calculer la dérivée de f, et dresser son tableau de variations complet.
   (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
   (c) Tracer sur le même graphique la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, 1]$ ainsi que les premiers termes de la suite (u_n) lorsque $u_0 = \dfrac{1}{4}$ (on prendra une échelle adaptée).
   (d) Majorer $|f'(x)|$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|1 - u_{n+1}| \leq k|1 - u_n|$ (où k est une constante que l'on explicitera à l'aide des questions précédentes).
   (b) En déduire une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.
   (c) En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).
   (d) Déterminer un entier n_0 à partir duquel u_n est une valeur approchée de sa limite à 10^{-2} près (on fera l'application numérique).

Exercice 3

Les deux questions sont complètement indépendantes :

1. Factoriser le polynôme $P = X^3 - X^2 - \frac{39}{4}X - 9$ sachant qu'il admet une racine double.
2. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & \frac{1}{2} \\ & & & & xyz & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Exercice 4

On cherche à étudier la suite définie par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}\, dx$.

1. Calculer I_0.
2. Calculer $I_0 + I_1$, et en déduire la valeur de I_1.
3. Calculer plus généralement la valeur de $I_n + I_{n+1}$.
4. Déterminer la monotonie de la suite (I_n), et en déduire sa convergence.
5. À l'aide des deux questions précédentes, déterminer la limite de (I_n).