TD n°7 : corrigé

PTSI Lycée Eiffel

1er février 2018

Exercice 1

1. Il est bien entendu sous-entendu que n est un entier naturel (et même non nul) pour que l'exercice ait de l'intérêt. Pour résoudre cette équation, on va bien entendu utiliser l'outil préféré des élèves de PTSI, les racines n-èmes de l'unité. Posons pour être rigoureux $Z = z-1$, on doit donc résoudre l'équation $Z^n = 1$, qui a pour solutions les n nombres complexes $Z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (c'est du cours, mais rappelons en passant que ça se démontre en deux lignes en écrivant l'équation sous forme exponentielle). On en déduit les solutions de l'équation initiale : $z_k = 1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.
2. Encore une technique classique, la factorisation par l'angle moitié : $z_k = e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{-i\frac{kpi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}}) = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}$ (en appliquante les formules d'Euler pour reconnaitre le cosinus). On tient là une écriture qui ressemble fort à une forme exponentielle, mais il faut tout de même faire attention au signe du facteur réel : lorsque $k \leq \frac{n}{2}$, $\frac{k\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $|z_k| = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ (qui est bien positif), et $\arg(z_k) \equiv \frac{k\pi}{n}[2\pi]$. Dans le cas contraire, donc si $k > \frac{n}{2}$, il faut changer le signe, ce qu'on peut faire de la façon suivante : $z_k = -2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i(\frac{k\pi}{n}+\pi)}$. On conclut alors que $|z_k| = -2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, et $\arg(z_k) \equiv \frac{k\pi}{n} + \pi[2\pi]$.
3. On peut bien entendu faire un joli calcul de somme géométrique, mais c'est superflu, on doit savoir que la somme des racines n-èmes de l'unité est nulle, c'est-à-dire que $\sum_{k=0}^{n-1} Z_k = 0$. Toujours ? Attention quand même, c'est faut lorsque $n = 1$, puisque dans ce cas la seule racine est $Z_0 = 1$, et bien entendu $z_0 = 1 + 1 = 2$ est l'unique solution de notre équation. Si $n \neq 1$, on aura $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k + 1 = n + \sum_{k=0}^{n-1} Z_k = n$.

Exercice 2

1. La fonction arctangente étant définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, seul ce qui se trouve à l'intérieur peur poser problème, on a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. Ce domaine de définition est symétrique par rapport à 0, et $\forall x \neq 0$, on peut calculer $f(-x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{-2x}\right) = -\arctan\left(\frac{1-x^2}{2x}\right) = -f(x)$ (car la fonction arctan est une fonction impaire), donc f est une fonction impaire.
2. La fonction $x \mapsto \frac{1-x^2}{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et bien entendu à valeurs dans $\mathbb{R}$ où arctan est toujours dérivable, donc f est dérivable sur chacun de ses deux intervalles de définition. En posant $g(x) = \frac{1-x^2}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2}$, on calcule $g'(x) = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{x^2+1}{2x^2}$, puis $f'(x) =$

$\dfrac{g'(x)}{1+g(x)^2} = -\dfrac{x^2+1}{2x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{(1-x^2)^2}{4x^2}} = -\dfrac{2(x^2+1)}{4x^2+(1-x^2)^2} = -\dfrac{2(x^2+1)}{1+2x^2+x^4} = -\dfrac{2(x^2+1)}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{2}{x^2+1}$.

3. On reconnait dans la dérivée précédente, au facteur -2 près, celle de la fonction arctangete. Attention à ne pas oublier la constante d'intégration, et à distinguer les deux intervalles de définition de f. Sur $]0,+\infty[$, il existe une constante k_1 telle que $f(x) = -2\arctan(x) + k_1$. Pour déterminer la constante, on note par exemple que $f(1) = \arctan(0) = 0$, donc $0 = -2\arctan(1) + k_1$, soit $k_1 = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit donc que, $\forall x > 0$, $f(x) = -2\arctan(x) + \dfrac{\pi}{2}$. De même, sur $]-\infty,0[$, on aura $f(x) = -2\arctan(x) + k_2$, avec par exemple $f(-1) = 0$, donc $k_2 = 2\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, puis $f(x) = -2\arctan(x) - \dfrac{\pi}{2}$. On pouvait également utiliser l'imparité de la fonction f pour trouver cette deuxième expression à partir de la première.

Exercice 3

1. Sous la forme $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on reconnait, au signe près, un quotient de la forme $\dfrac{u'}{u}$, on en déduit qu'une primitive de tan sur l'intervalle I (où la fonction cos est strictement positive) est $x \mapsto -\ln(\cos(x))$ (pas besoin de valeur absolue). Les solutions de l'équation homogène $y' - \tan(x)y = 0$ sur l'intervalle I sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{-\ln(\cos(x))} = \dfrac{K}{\cos(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
2. Pour linéariser, on peut par exemple utiliser la formule d'Euler : $\cos^3(x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}}{8} = \dfrac{\cos(3x)}{4} + \dfrac{3\cos(x)}{4}$.
3. Pour déterminer une solution particulière, on va utiliser la méthode de variation de la constante en cherchant cette solution y_p sous la forme $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{\cos(x)}$. On aura alors $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)\cos(x) + K(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$. Cette fonction y_p est solution de l'équation (E) si $\dfrac{K'(x)}{\cos(x)} + \dfrac{K(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} - \dfrac{\tan(x)K(x)}{\cos(x)} = \cos^2(x)$, soit $K'(x) = \cos^3(x)$ (les deux autres termes s'annulent, comme d'habitude). En utilisant la question précédente, on doit donc avoir $K'(x) = \dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$. On peut donc choisir $K(x) = \dfrac{1}{12}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin(x)$, soit $y_p(x) = \dfrac{1}{12}\dfrac{\sin(3x)}{\cos(x)} + \dfrac{3}{4}\tan(x)$. Toutes les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle I peuvent alors s'écrire sous la forme $y : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) + K}{\cos(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
4. Puisque $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, en remplaçant dans l'équation, on trouve la condition $\dfrac{1}{12}\sin(\pi) + \dfrac{3}{4}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + K = 2\sqrt{3}$, soit $K = 2\sqrt{3} - \dfrac{3}{4} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{13\sqrt{3}}{8}$. On en déduit que $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}\left(\dfrac{1}{12}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin(x) + \dfrac{13\sqrt{3}}{8}\right)$.

Problème

Partie A : étude d'un exemple.

1. On doit avoir $4u_2 - u_1 = f(1) = 3$, donc $u_2 = \dfrac{3+u_1}{4} = 1$. Puis $9u_3 - 4u_2 = f(2) = 5$, soit $u_3 = \dfrac{5+4u_2}{9} = 1$. On conjecture brillamment que la suite (u_n) est constante égale à 1. Prouvons-le par récurrence sur l'entier $n \geq 1$. C'est vrai au rang 1 par hypothèse, et en supposant $u_n = 1$, la relation de récurrence définssant la suite (u_n) impose $(n+1)^2 u_{n+1} - n^2 = f(n) = 2n+1$, soit $(n+1)^2 u_{n+1} = n^2+2n+1 = (n+1)^2$, dont on déduit facilement $u_{n+1} = 1$. La propriété $u_n = 1$ est initialisée au rang 1 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$, ce qui prouve que la suite est bien constante.

2. (a) C'est un calcul évident : $u_{n+1} = \dfrac{2n+1+n^2u_n}{(n+1)^2}$.

   (b) La propriété est supposée vraie au rang 1 par l'énoncé, supposons-la vérifiée au rang n. On a alors $u_n > 1$, donc $n^2u_n > n^2$ et $2n+1+n^2u_n > 2n+1+n^2 = (n+1)^2$, donc on déduit aisément que $u_{n+1} > 1$. Ceci achève la récurrence et prouve la propriété souhaitée.

   (c) Calculons, en utilisant le résultat de la quesiton a, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+1+n^2u_n}{(n+1)^2} - u_n = \dfrac{2n+1+n^2un - (n^2+2n+1)u_n}{(n+1)^2} = \dfrac{(2n+1)(1-u_n)}{(n+1)^2}$. Les facteurs $2n+1$ et $(n+1)^2$ sont évidemment positifs, et la question précédente a prouvé que $1-u_n < 0$, donc $u_{n+1}-u_n < 0$ et la suite (u_n) est bien décroissante.

   (d) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, elle converge donc (théorème de convergence monotone). Tout ce qu'on peut dire pour l'instant sur sa limite l, c'est que $l \geq 1$ (inégalité large quand on passe à la limite).

   (e) L'inégalité de gauche découle évidemment de celle prouvée à la question b. Pour celle de droite, comme on adore ça, on peut faire une récurrence. Au rang 1, l'inégalité $u_1 - 1 \leq u_1 - 1$ est vraie, supposons l'inégalité vraie au rang n, alors $u_{n+1} - 1 = \dfrac{n^2}{(n+1)^2}u_n + \dfrac{2n+1}{(n+1)^2} - 1 = \dfrac{n^2}{(n+1)^2}u_n - \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2}(u_n - 1)$. Par hypothèse de récurrence, $u_n - 1 \leq \dfrac{1}{n^2}(u_1 - 1)$, donc $\dfrac{n^2}{(n+1)^2}(u_n - 1) \leq \dfrac{u_1 - 1}{(n+1)^2}$ (tout est positif), ce qui est exactement ce qu'on voulait prouver. La propriété est donc prouvée par récurrence.

   (f) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1 - 1}{n^2} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. (a) La relation de récurrence définissant la suite (u_n) peut simplement s'écrire sous la forme $v_{n+1} - v_n = 2n+1$, ce qui rend cette question absolument triviale.

   (b) Tiens, si on faisait une petite récurrence ? Au rang 1, on a bien $v_1 = u_1$ par définition. Supposons la propriété vérifiée au rang n, alors $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$, ce qui est par hypothèse de récurrence égal à $n^2 - 1 + u_1 + 2n + 1 = (n+1)^2 - 1 + u_1$, ça marche !

   (c) On peut donc écrire $u_n = \dfrac{v_n}{n^2} = 1 + \dfrac{u_1 - 1}{n^2}$. Puisque $u_1 - 1$ est constant, on a bien entendu $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1 - 1}{n^2} = 0$, et on en déduit que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Partie B : cas général.

1. Une petite récurrence ne peut pas nous faire de mal : au rang 1, on a bien sûr $v_1 = \dfrac{v_1}{1^2}$ qui est toujours vraie. Supposons désormais que $v_n = \dfrac{v_1}{n^2}$, alors on sait que $(n+1)^2 v_{n+1} - n^2 v_n = 0$

puisque la suite vérifie la propriété (ii), donc $v_{n+1} = v_n \times \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = \dfrac{v_1}{n^2} \times \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = \dfrac{v_1}{(n+1)^2}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. Pour la réciproque, on vérifie simplement que $(n+1)^2 v_{n+1} - n^2 v_n = (n+1)^2 \times \dfrac{k}{(n+1)^2} - n^2 \times \dfrac{k}{n^2} = 0$, ce qui est trivial.

2. C'est évident puisque dans ce cas $(n+1)^2(u_{n+1} - v_{n+1}) - n^2(u_n - v_n) = (n+1)^2 u_{n+1} - n^2 u_n - ((n+1)^2 v_{n+1} - n^2 v_n) = f(n) - 0 = f(n)$.
3. C'est le même calcul trivial que ci-dessus : si $(n+1)^2 u_{n+1} - n^2 u_n = f(n)$ et $(n+1)^2 v_{n+1} - n^2 v_n = 0$, en additionnant les deux équations, la suite $(u_n + v_n)$ vérifie bien la propriété (i).
4. (a) On a déjà fait le calcul à la toute première question du problème, il s'agit de la suite constante égale à 1.

   (b) On sait que toutes les suites vérifiant (ii) sont de la forme $v_n = \dfrac{k}{n^2}$ et que la suite constante égale à 1 vérifie la propriété (i), l'équivalence prouvée aux questions 2 et 3 prouve alors que (u_n) est somme d'une suite quelconque vérifiant (ii) et d'une suite particulière vérifiant (i) (c'est exactement le même principe que pour les équations différentielles), donc $u_n = 1 + \dfrac{k}{n^2}$, pour une certaine constante k (ici $k > 0$ puisqu'on a supposé que $u_1 > 1$).

   (c) Avec l'expression explicite, on a trivialement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.