

# TD n°6 : spécial dénombrement

PTSI B Lycée Eiffel

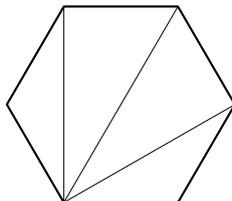
18 janvier 2018

## Problème

Ce problème présente quelques dénombrements classiques faisant intervenir une suite de nombres entiers appelés nombres de Catalan, ainsi que l'étude de quelques propriétés de ces nombres. Les différentes parties du problème sont très largement indépendantes.

### I. Triangulations de polygones.

Triangler un polygone à  $n$  côtés consiste à tracer un certain nombre de cordes dans le polygone (segments reliant deux sommets non adjacents du polygone), de façon à la découper en triangles (les cordes ne doivent donc pas se couper). Ci-dessous, un exemple de triangulation d'un hexagone :



On notera dans cette partie  $t_n$  le nombre de triangulations distinctes d'un polygone à  $n + 2$  côtés (en convenant que  $t_0 = 1$ ).

1. Déterminer les valeurs de  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  (on pourra faire des petits dessins pour illustrer).
2. Vérifier que  $t_4 = 14$  en dessinant les 13 triangulations d'un hexagone régulier distinctes de celle donnée en exemple plus haut.
3. Soient  $A_1, A_2, \dots, A_{n+3}$  les sommets d'un polygone à  $n + 3$  côtés. Quel est le nombre de triangulations du polygone contenant le triangle  $A_1 A_i A_{n+3}$  (pour  $k \in \{2, \dots, n + 2\}$ ) ? On exprimera le résultat en fonction des nombres  $t_i$ , pour des valeurs de  $i$  inférieures ou égales à  $n$ .
4. En déduire que,  $\forall n \geq 1$ ,  $t_{n+1} = \sum_{k=0}^n t_k t_{n-k}$ .
5. Vérifier à l'aide de cette relation les valeurs des premiers termes de la suite  $(t_n)$ , et calculer  $t_5$  et  $t_6$ .

## II. Une formule explicite.

On note dans cette section  $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  (pour tout entier naturel  $n$ ).

1. Calculer  $c_0, c_1, c_2$  et  $c_3$ .

2. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$ .

3. Prouver toutes les relations suivantes :  $c_n = \frac{1}{n} \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{2}{n+1} \binom{2n-1}{n}$ .

4. Expliquer pourquoi  $c_n$  est toujours un entier naturel.

5. (a) Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}, 4 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq 4 \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{3}{2}}$ .

(b) En déduire que  $\frac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq 3 \times \frac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}}$ .

6. On note dans cette question  $S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$  et  $T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}$ .

(a) En effectuant le changement d'indice  $i = n - k$ , prouver que  $T_n = \frac{n}{2} S_n$ .

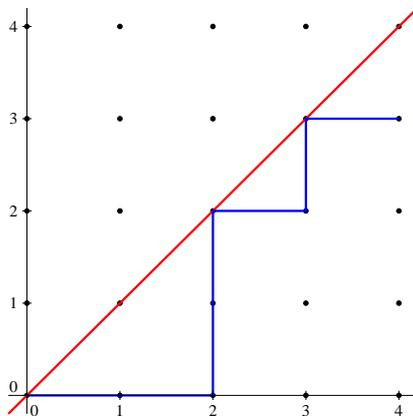
(b) Montrer que  $T_{n+1} + S_{n+1} = 4T_n + 3S_n$ .

(c) Prouver par récurrence, en utilisant les résultats des deux questions précédentes, que  $S_n = c_{n+1}$ .

(d) En comparant les relations de récurrence obtenues sur les suites  $(c_n)$  et  $(t_n)$  (de la première partie du problème), prouver rigoureusement que  $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

## III. Le retour du dénombrement.

On considère dans cette partie des chemins menant dans le plan de l'origine du repère jusqu'au point de coordonnées  $(n, m)$ , en respectant les conditions suivantes : à chaque pas, on se déplace d'une unité vers la droite, ou bien d'une unité vers le haut. On note  $\Delta$  l'ensemble des points du plan de coordonnées  $(x, y)$  situés sous la droite d'équation  $y = x$  (c'est-à-dire tels que  $x \leq y$ ), et on note  $\delta_{n,m}$  le nombre de chemins menant de  $(0, 0)$  à  $(n, m)$  et situés entièrement dans  $\Delta$  (autrement dit, ne traversant pas la diagonale). Un exemple avec  $(n, m) = (3, 4)$  :



1. (a) Que vaut  $\delta_{n,0}$  (pour tout entier  $n$ ) ? Que vaut  $\delta_{n,m}$  si  $m > n$  ?

(b) Justifier que  $\delta_{n,n} = \delta_{n,n-1}$  (si  $n \geq 1$ ) et  $\delta_{n,m} = \delta_{n-1,m} + \delta_{n,m-1}$  si  $m < n$ .

(c) En déduire la valeur de  $\delta_{n,1}$  (pour  $n \geq 1$ ) et de  $\delta_{n,2}$  (pour  $n \geq 2$ ).

- (d) Donner la liste des  $\delta_{n,m}$  pour toutes les valeurs de  $n$  et de  $m$  inférieures ou égales à 6, en les présentant sous forme d'un tableau de type « triangle de Pascal ». Comparer les valeurs « diagonales »  $\delta_{n,n}$  à celles de  $t_n$  et de  $c_n$  obtenues dans les deux premières parties du problème.
2. (a) Montrer par récurrence sur  $n$  que  $\delta_{n,m} = \frac{n-m+1}{n+1} \binom{n+m}{n}$ .
- (b) En déduire que  $\delta_{n,n} = c_n$ .
3. (a) Montrer que le nombre de chemins menant de  $(0,0)$  à  $(n,n)$  sans croiser la diagonale  $\Delta$  (ailleurs qu'en  $(0,0)$  et en  $(n,n)$ , bien évidemment) est égal à  $c_{n-1}$  (ou si vous préférez à  $\delta_{n-1,n-1}$ ).
- (b) Montrer que le nombre de chemins menant de  $(0,0)$  à  $(n,n)$  en recoupant pour la première fois la diagonale en  $(k,k)$  est égal à  $c_{k-1}c_{n-k}$ .
- (c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\delta_{n,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k-1,k-1} \delta_{n-k,n-k}$ .