# TD n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

30 novembre 2017

## Exercice 1

1. Un calcul basique : $z = \dfrac{6-9i+2i+3}{5+2i} = \dfrac{(9-7i)(5-2i)}{25+4} = \dfrac{45-35i-18i-14}{29} = \dfrac{35}{29} - \dfrac{53}{29}i$.
2. La normalisation $y' + 3\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^3}$ impose de résoudre séparément sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Effectuons donc la résolution sur $\mathbb{R}^{+*}$, les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{-3\ln(x)} = \dfrac{K}{x^3}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On applique la méthode de variation de la constante pour rechercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{x^3}$. On calcule alors $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)}{x^3} - \dfrac{3K(x)}{x^4}$, et $y_p'(x) + 3\dfrac{y_p(x)}{x} = \dfrac{1}{x^3} \Leftrightarrow \dfrac{K'(x)}{x^3} - \dfrac{3K(x)}{x^4} + \dfrac{3K(x)}{x^4} = \dfrac{1}{x^3}$. On trouve la condition $\dfrac{K'(x)}{x^3} = \dfrac{1}{x^3}$, soit $K'(x) = 1$, qui est par exemple vérifiée en posant $K(x) = x$. Cela correspond à $y_p(x) = \dfrac{1}{x^2}$, et les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{K}{x^3}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Pour les curieux, les solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont exactement de la même forme : $y(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{L}{x^3}$, avec $L \in \mathbb{R}$. Et on ne peut effectuer aucun recollement en 0 puisqu'aucune de ces solutions n'admet une limite finie en $0^+$ ou en $0^-$.
3. On procède aux étapes habituelles pour ce genre de calcul :
   - Factorisation du dénominateur : $x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5)$. On ne peut pas factoriser plus puisque la parenthèse a un discriminant égal à $16 - 20 = -4$.
   - Décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{x^3 - 4x^2 + 5x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{x^2 - 4x + 5}$. On multiplie tout par $x$ : $\dfrac{1}{x^2 - 4x + 5} = a + \dfrac{bx^2 + cx}{x^2 - 4x + 5}$ et on remplace $x$ par 0 pour obtenir $\dfrac{1}{5} = a$. Puisqu'on a multiplié par $x$, on peut aussi déterminer la limite en $+\infty$ pour obtenir $0 = a + b$, donc $b = -\dfrac{1}{5}$ (on utilise simplement le quotient des termes de plus haut degré pour la limite de droite). Enfin, on peut poser $x = 1$ dans l'égalité initiale pour obtenir $\dfrac{1}{2} = a + \dfrac{b + c}{2}$, d'où $c = 1 - 2a - b = 1 - a = \dfrac{4}{5}$. Finalement, $\dfrac{1}{x^3 - 4x^2 + 5x} = \dfrac{1}{5x} - \dfrac{x - 4}{5(x^2 - 4x + 5)}$.
   - Calcul de l'intégrale : le premier morceau ne pose pas de problème : $\displaystyle\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{5x}\,dx = \left[\frac{\ln(x)}{5}\right]_3^{2+\sqrt{3}} = \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{5} - \frac{\ln(3)}{5}$. Pour le deuxième morceau, calculons $\displaystyle\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{x-4}{x^2-4x+5}\,dx = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{x-2}{x^2-4x+5} - \frac{2}{(x-2)^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) - 2\arctan(x-2)\right]_3^{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln(4+4\sqrt{3}+3-8-4\sqrt{3}+5) - \frac{1}{2}\ln(2) - 2\arctan(\sqrt{3}) + 2\arctan(1) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} =$

$\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{6}$. Il ne reste plus qu'à conclure : l'intégrale initiale vaut $\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{5} - \frac{\ln(3)}{5} - \frac{\ln(2)}{10} + \frac{\pi}{30}$ (ça ne se simplifie pas vraiment, autant le laisser sous cette forme).

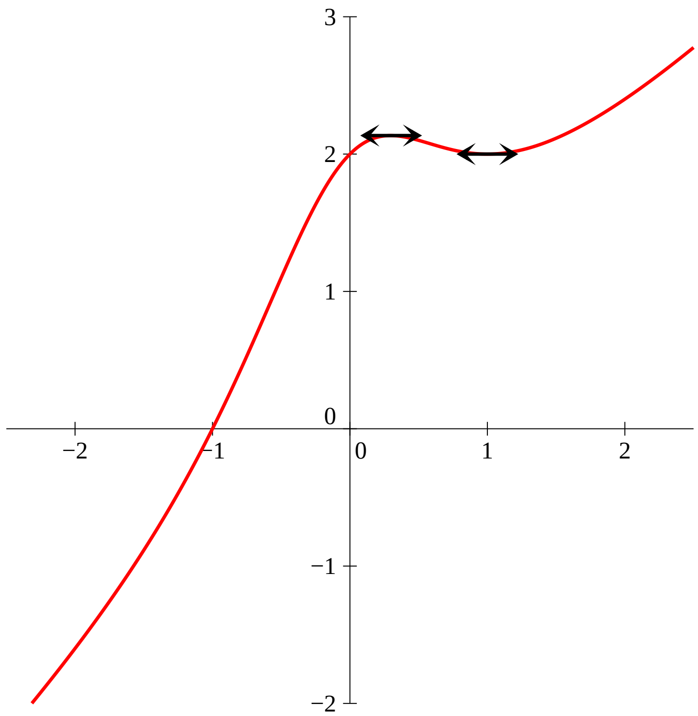
# Exercice 2

1. La normalisation ne pose aucun problème puisque $x^2+1$ ne s'annule jamais. L'équation homogène $y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{-\ln(x^2+1)} = \frac{K}{x^2+1}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On peut bien sûr appliquer la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation complète, mais rien n'empêche de constater que $y_p : x \mapsto x$ convient trivialement. Bon, faisons quand même le calcul en posant $y_p(x) = \frac{K(x)}{x^2+1}$. On calcule $y_p'(x) = \frac{(x^2+1)K'(x) - 2xK(x)}{(x^2+1)^2}$. On aura alors $y_p'(x) + \frac{2x}{x^2+1}y_p(x) = \frac{3x^2+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{K'(x)}{x^2+1} - \frac{2xK(x)}{(x^2+1)^2} + \frac{2xK(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+1}{x^2+1}$, soit $K'(x) = 3x^2+1$. On peut choisir $K(x) = x^3+x$, ce qui donne $y_p(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1} = x$ (mais si, ça se simplifie !). Conclusion : les solutions de notre équation différentielle sont de la forme $y(x) = \frac{K}{x^2+1} + x$, avec $K \in \mathbb{R}$.
2. Pour avoir $y(0) = 1$, il faut poser $K = 1$ dans la formule précédente, soit $f_0(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$. De façon plus générale, $f_k(x) = x + \frac{k+1}{x^2+1}$.
3. Calculons donc les équations de ces tangentes : $f_k'(x) = 1 - \frac{2(k+1)x}{(x^2+1)^2}$, donc $f_k'(0) = 1$. C'est en fait suffisant pour affirmer que toutes les tangentes en 0 seront parallèles puisqu'elles auront toutes pour pente 1 (et accessoirement pour ordonnée à l'origine $k$, par définition des fonctions $f_k$).
4. Non seulement les asymptotes sont parallèles, mais elles sont en fait identiques ! En effet, $f_k(x) - x = \frac{k+1}{x^2+1}$ a manifestement une limite nulle en $\pm\infty$, quelle que soit la valeur de $k$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ et $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Si $k$ est $k'$ sont deux réels distincts, on a $f_k(x) - f_{k'}(x) = \frac{k-k'}{x^2+1}$. Cette différence est toujours du signe de $k - k'$, ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}_k$ est toujours au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_{k'}$ lorsque $k > k'$.
6. Comme on l'a vu précédement, $f_1(x) = x + \frac{2}{x^2+1}$, et $f_1'(x) = 1 - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$. Cette dérivée est bien entendu du signe de son numérateur $x^4+2x^2-4x+1$, qui a pour racine évidente $x = 1$ (coup de pot, quand même). On peut donc poser $x^4+2x^2-4x+1 = (x-1)(ax^3+bx^2+cx+d) = ax^4+(b-a)x^3+(c-b)x^2+(d-c)x-d$. Une petite identification des coefficients permet d'obtenir les conditions $a = 1$ ; $b - a = 0$ donc $b = 1$ ; $c - b = 2$ donc $c = 3$ ; $d - c = -4$, donc $d = -1$ (cohérent avec la dernière équation). On trouve donc $x^4+2x^2-4x+1 = (x-1)(x^3+x^2+3x-1)$. Posons $g(x) = x^3+x^2+3x-1$, la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 3x^2+2x+3$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 24 < 0$. Puisque $g'$ est strictement positive, la fonction $g$ est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (le calcul des limites ne pose aucun problème). Il existe donc un unique réel $\alpha$ tel que $g(\alpha) = 0$. On peut préciser un peu plus : $g(0) = -1$ et $g(1) = 4$ donc le théorème des valeurs

intermédiaires assure que $\alpha \in ]0,1[$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant pour la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On ne peut pas vraiment calculer précisément $f(\alpha)$, même si on peut facilement l'encadrer : sur l'intervalle $[0,1]$, on a $1 \leq x^2+1 \leq 2$, donc $1 \leq \dfrac{2}{x^2+1} \leq 2$. On en déduit facilement que $1 \leq f(x) \leq 3$, et le tableau de variations assure qu'en fait $2 < f(\alpha) \leq 3$. La courbe $\mathcal{C}_1$ ressemble à ceci :




# Exercice 3

1. Sur $]0,+\infty[$, on pose donc $y(x) = z(\ln(x))$, et on calcule $y'(x) = \dfrac{z'(\ln(x))}{x}$ puis $y''(x) = -\dfrac{z'(\ln(x))}{x^2} + \dfrac{z''(\ln(x))}{x^2}$. En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve l'équation équivalente $-z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) - 3z(\ln(x)) = x^4$. En changeant la variable pour poser $t = \ln(x)$, cela revient à avoir $z''(t) - 2z'(t) - 3z(t) = e^{4t}$. Cette équation du second ordre à coefficients constants a pour équation caractéristique $t^2 - 2t - 3 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 12 = 16$, et dont les racines sont $t_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $t_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc de la forme $z_h(t) = Ae^{-t} + Be^{3t}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Comme le réel 4 n'est pas solution de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière à l'équation sous la forme $z_p(t) = Ke^{4t}$. On aura alors $z_p'(t) = 4Ke^{4t}$ puis $z''(t) = 16Ke^{4t}$, et la fonction est solution de l'équation complète si et seulement si

$(16K-8K-3K)e^{4t} = e^{4t}$, soit $K = \dfrac{1}{5}$. On choisit donc $K = \dfrac{1}{5}$, et toutes les solutions de l'équation complète sont les fonctions $z : t \mapsto \dfrac{1}{5}e^{4t} + Ae^{-t} + Be^{3t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Il n'y a plus qu'à remonter le changement de variable pour retrouver les solutions de notre équation initiale sur $]0, +\infty[$ : $y(x) = \dfrac{1}{5}e^{4\ln(x)} + Ae^{-\ln(x)} + Be^{3\ln(x)} = \dfrac{x^4}{5} + \dfrac{A}{x} + Bx^3$, avec toujours $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

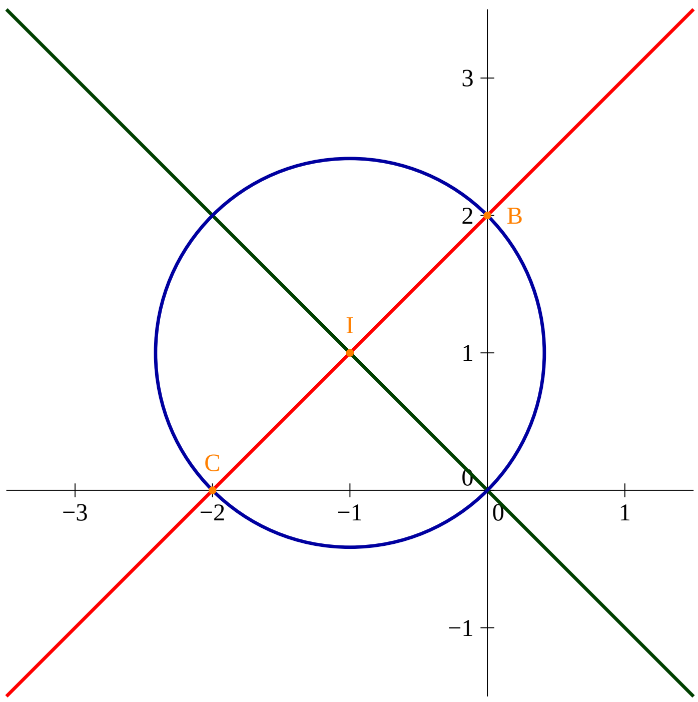
2. Il suffit de poser $t = \ln(-x)$, ou si on préfère $y(x) = z(\ln|x|)$ pour pouvoir faire le calcul sur $]-\infty, 0[$. Les dérivées de $y$ ne sont absolument pas modifiées par rapport au calcul précédent (au détail près de la présence de la valeur absolue dans le ln), et le second membre non plus puisque $(-e^t)^4 = e^{4t}$. Les solutions seront donc exactement de la même forme (quand on remonte le changement de variable, on aura un changement de signe sur le terme en $x^3$ et sur le terme en $\dfrac{1}{x}$, mais quitte à changer le signe des constantes, la forme reste la même), soit $y(x) = \dfrac{x^4}{5} + \dfrac{C}{x} + Dx^3$, avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$.
3. Les fonctions solutions sur chacun des deux intervalles n'auront une limite finie en 0 (respectivement $0^+$ et $0^-$) que si les constantes $A$ et $C$ sont nulles. Dans ce cas, la limite en question est nulle de chaque côté. On trouve alors des solutions potentielles de la forme $\dfrac{x^4}{5} + Bx^3$ sur $\mathbb{R}^+$, et $\dfrac{x^4}{5} + Dx^3$ sur $\mathbb{R}^-$. Ces fonctions ont des dérivées première et seconde qui sont toujours nulles en 0 (quand on dérive deux fois le $x^3$, il reste un facteur $x$ qui s'annule en 0), on peut toujours recoller de telles fonctions en 0, même quand les constantes $B$ et $D$ sont distinctes.

## Exercice 4

1. Calculons donc $f(1) = \dfrac{1-2i}{3} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}i$ ; puis $f(2+i) = \dfrac{2-i}{4+i} = \dfrac{(2-i)(4-i)}{16+1} = \dfrac{7}{17} - \dfrac{6}{17}i$ ; et enfin $f(e^{i\frac{\pi}{3}}) = \dfrac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2i}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2} = \dfrac{1 + i(\sqrt{3}-4)}{5 + i\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i(\sqrt{3}-4))(5-i\sqrt{3})}{25+3} = \dfrac{5 + 3 - 4\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} - 20i}{28} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{7} - i\dfrac{\sqrt{3}+5}{7}$.
2. On peut faire les deux à la fois en exhibant simplement la réciproque (s'il y en a une, c'est que l'application est bijective) : $f(z) = \dfrac{z-2i}{z+2} = Z \leftrightarrow z - 2i = zZ + 2Z \Leftrightarrow z(1-Z) = 2Z + 2i \Leftrightarrow z = \dfrac{2Z+2i}{1-Z}$, à condition bien entendu d'avoir $Z \neq 1$ (sinon $Z$ n'a pas d'antécédent par l'application $f$). On en déduit que $f$ est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{-2\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, et que sa réciproque est définie par $f^{-1}(z) = \dfrac{2z+2i}{1-z}$.
3. Posons donc $z = a + ib$ et calculons $f(z) = \dfrac{a + i(b-2)}{a+2+ib} = \dfrac{(a+i(b-2))(a+2-ib)}{(a+2)^2+b^2} = \dfrac{a^2+2a+b^2-2b+i(ab-2a+2b-4-ab)}{(a+2)^2+b^2}$. Ce nombre est réel si sa partie imaginaire est nulle, donc si $-2a+2b-4 = 0$, ou encore $b = a+2$. On reconnait là l'équation d'une droite (de coefficient directeur 1 et d'ordonnée à l'origine 2 pour ceux qui ont vraiment du mal à reconnaitre), à laquelle il faut tout de même enlever le point d'affixe $-2$. On pouvait d'ailleurs très bien obtenir ce résultat de façon purement géometrique : $f(z) \in \mathbb{R}$ revient à dire que $\arg\left(\dfrac{z-2i}{z+2}\right) \equiv 0[\pi]$, ou encore que $\arg(z-2i) \equiv \arg(z+2)[\pi]$. En notant $A$, $B$ et $C$ les images respectives des nombres complexes $z$, $2i$ et $-2$ dans le plan complexe, on peut traduire cela par $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{CA})[\pi]$, ou encore $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) \equiv 0[\pi]$. Cela revient exactement à dire que

les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés. Autrement dit, $A$ est sur la droite $(BC)$, qui est exactement la droite d'équation $y = x+2$. Un petit dessin illustratif pour les trois ensembles sera donné après la question 5.

4. En reprenant le calcul de la question précédente, on aura cette fois-ci $f(z)$ imaginaire pur si $a^2+2a+b^2-2b=0$, soit $(a+1)^2+(b-1)^2=2$. On reconnait l'équation du cercle de centre $I(-1+i)$ et de rayon $\sqrt{2}$ (auquel il faut à nouveau enlever le point $C$). Là encore on pouvait s'en sortir géometriquement : en reprenant les notations de la question précédente, on aura cette fois $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, ce qui revient à dire que le triangle $ABC$ est rectangle en $A$. Cela se produit, comme chacun le sait depuis ses années de maternelle ou à peu près, lorsque le point $A$ appartient au cercle de diamètre $[BC]$. Or, ce cercle a bien pour centre $I$ (le milieu de $[BC]$) et pour rayon $\sqrt{2}$. Là encore, voir la figure après la question 5.
5. Ah, pour celle-ci, il vaut nettement mieux ne pas utiliser la forme obtenue en posant $z=a+ib$. Ce n'est d'ailleurs pas du tout nécessaire, on veut $|f(z)|=1$, soit $\left|\dfrac{z-2i}{z+2}\right| = 1$, soit encore $|z-2i| = |z+2|$. On peut à nouveau conclure géometriquement (on reconnait la médiatrice du segment $[BC]$), ou bien on pose maintenant $z=a+ib$ : cela donne $|a+i(b-2)| = |a+2+ib|$, donc en élevant au carré (tout est positif) $a^2+(b-2)^2 = (a+2)^2+b^2$. On développe et on simplifie : $a^2+b^2-4b+4 = a^2+4a+4+b^2 \Leftrightarrow a=-b$. On reconnait bien la droite de pente $-1$ passant par l'origine. Sur le schéma qui suit, la droite de la question 3 est en rouge, le cercle de la question 4 est en bleu et la droite de la question 5 est en vert :




6. (a) Posons donc : $f(2e^{i\theta}) = \dfrac{2(e^{i\theta}-i)}{2(e^{i\theta}+1)}$, puis appliquons la factorisation par l'angle moitié (si elle ne semble pas évidente au numérateur, on commence par factoriser par $e^{i\frac{\pi}{2}}$ pour se débarasser du $i$) : $f(z) = \dfrac{e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}(e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} - e^{i(-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}})} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \dfrac{2i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}{2\cos(\frac{\theta}{2})} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \times \dfrac{\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$ (on remplace simplement le $i$ restant au numérateur par $e^{i\frac{\pi}{2}}$).

   (b) Dans la formule obtenue à la question précédent, le quotient $\dfrac{\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$ est un nombre réel, donc $f(z)$ est de la forme $ke^{i\frac{3\pi}{4}}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Selon le signe de $k$, on aura $\arg(f(z)) = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $\arg(f(z)) = -\dfrac{\pi}{4}$, mais dans tous les cas, $f(z)$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

(c) Le problème est de savoir si tous les points de la droite qu'on vient d'obtenir sont ou non images d'éléments de $\mathcal{C}$. Mais comme on sait que $f$ est bijective, il suffit de travailler dans l'autre sens. Soit donc un nombre complexe $z = a - ai$, affixe d'un point de la droite $\Delta$, l'antécédent de $z$ par l'application $f$ est le nombre $f^{-1}(a - ai) = \dfrac{2a - 2ai + 2i}{1 - a + ai} = 2 \times \dfrac{a + i(1-a)}{1 - a + ai}$. Ce nombre est un nombre complexe de module 2 (on constate facilement que le numérateur et le dénominateur de la fraction ont le même module), donc $f^{-1}(z) \in \mathcal{C}$. L'image par $f$ du cercle $\mathcal{C}$ est donc la droite $\Delta$ tout entière.

## Exercice 5

1. Posons donc comme on nous le demande $y(x) = z(\arccos(x))$, et calculons $y'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arccos(x))$, puis $y''(x) = \dfrac{1}{1-x^2} z''(\arccos(x)) - \dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} z'(\arccos(x))$ (la dérivée de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est bien $\dfrac{-2x}{-2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$). On remplace maintenant dans l'équation $(E)$ (en faisant bien attention aux signes, on multiplie $y''$ par $x^2 - 1$ et non par $1 - x^2$) pour obtenir $-z''(\arccos(x)) + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arccos(x)) - \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arccos(x)) - 8z(\arccos(x)) = 2x$. Il est temps de remplacer tous les $x$ par des $\cos(t)$, et donc $\sqrt{1-x^2}$par $\sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{\sin^2(t)})\sin(t)$ sur l'intervalle de résolution choisi. On trouve alors $-z''(t) - \dfrac{2\cos(t)}{\sin(t)} z'(t) - 8z(t) = 2\cos(t)$.
2. Puisqu'on nous demande juste de vérifier, on peut se contenter de dériver deux fois $u$ et de remplacer dans l'équation $(F)$ pour retrouver l'équation obtenue à la question précédente (ce n'est pas dur). Mais soyons donc courageux et faisons le calcul dans l'autre sens (ce qui prouvera en passant qu'il y a vraiment équivalence entre les deux équations). On pose donc $z(t) = \dfrac{u(t)}{\sin(t)}$, et on calcule $z'(t) = \dfrac{u'(t)}{\sin(t)} - \dfrac{u(t)\cos(t)}{\sin^2(t)}$ (je dérive comme un produit pour alléger les calculs), puis $z''(t) = \dfrac{u''(t)}{\sin(t)} - \dfrac{u'(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} - \dfrac{u'(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} + \dfrac{u(t)}{\sin(t)} + \dfrac{2u(t)\sin(t)\cos^2(t)}{\sin^4(t)} = \dfrac{u''(t)}{\sin(t)} + \dfrac{u(t)}{\sin(t)} - \dfrac{2u'(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} + \dfrac{2u(t)\cos^2(t)}{\sin^3(t)}$. Il est temps de remplacer tout cela joyeusement dans l'équation de la question 1 pour obtenir l'équation équivalente suivante : $-\dfrac{u''(t)}{\sin(t)} - \dfrac{u(t)}{\sin(t)} + \dfrac{2u'(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} - \dfrac{2u(t)\cos^2(t)}{\sin^3(t)} - \dfrac{2u'(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} + \dfrac{2u(t)\cos^2(t)}{\sin^3(t)} - \dfrac{8u(t)}{\sin(t)} = 2\cos(t)$. Une petite multiplication par $-\sin(t)$ et on tombe exactement sur l'équation $(F)$ : $u''(t) + 9u(t) = -2\cos(t)\sin(t)$.
3. L'équation $(F)$ est une équation du second ordre à coefficients constants. Inutile d'écrire son équation caractéristique pour résoudre l'équation homogène, on doit savoir par coeur que pour ce genre d'équation (sans terme en $u'$), on va trouver des solutions de la forme $u_h(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Pour trouver une solution particulière, on peut constater que le second membre peut s'écrire $-\sin(2t) = -\operatorname{Im}(e^{i2t})$. On peut donc chercher une solution complexe à l'équation $u''(t) + 9u(t) = -e^{i2t}$ sous la forme $u_c(t) = Ke^{i2t}$. On calcule aisément $u_c''(t) = -4Ke^{2it}$, et la fonction $u_c$ est donc solution si $5Ke^{2it} = -e^{2it}$, soit $K = -\dfrac{1}{5}$. On a donc $u_c(t) = -\dfrac{1}{5}e^{2it}$, et il suffit de prendre sa partie imaginaire pour trouver

une solution particulière de l'équation $(F)$ : $u_p(t) = -\frac{1}{5}\sin(2t)$. On conclut : les solutions de l'équation $(F)$ sont les fonctions de la forme $u : t \mapsto A\cos(3t) + B\sin(3t) - \frac{1}{5}\sin(2t)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

4. On ne reviendra pas trop sur les détails permettant de prouver que les équations $(E)$ et $(F)$ sont bien équivalentes sur les intervalles de résolution choisis, et on se contentera de remonter le calcul : $z(t) = \frac{u(t)}{\sin(t)} = \frac{A\cos(3t)}{\sin(t)} + \frac{B\sin(3t)}{\sin(t)} - \frac{1}{5}\sin(2t)$. Rappelons en passant que $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, et que $\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$, ce qui permet de simplifier un peu : $z(t) = \frac{A\cos(3t)}{\sin(t)} + 3B - 4B\sin^2(t) - \frac{2}{5}\cos(t) = \frac{A\cos(3t)}{\sin(t)} + 4B\cos^2(t) - B - \frac{2}{5}\cos(t)$. Dernière étape, on remplace les $t$ par des $\arccos(x)$. Bien sûr on peut écrire $\sin(t) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ sur notre intervalle, et $\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t) = 4x^3 - 3x$. On trouve alors les superbes expressions suivantes pour les solutions de l'équation $(E)$ sur l'intervalle $]-1, 1[$ :
$y(x) = \frac{A(4x^3 - 3x)}{\sqrt{1-x^2}} + B(4x^2 - 1) - \frac{2}{5}x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

5. La première condition $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ se traduit donc, en utilisant la formule précédente, par $\frac{A(\frac{4}{8} - \frac{3}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + B(1-1) - \frac{1}{5} = 1$, soit $-\frac{2}{\sqrt{3}}A = \frac{6}{5}$, et donc $A = -\frac{3\sqrt{3}}{5}$.
Pour exploiter la deuxième condition, il faut d'abord dériver les formules obtenues pour les solutions : $y'(x) = \frac{A(12x^2 - 3)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{Ax(4x^3 - 3x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + 8Bx - \frac{2}{5}$. On veut donc avoir $\frac{A(3-3)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\frac{A}{2}(\frac{4}{8} - \frac{3}{2})}{\frac{3\sqrt{3}}{8}} + 4B - \frac{2}{5} = 1$, soit $-\frac{4}{3\sqrt{3}}A + 4B = \frac{7}{5}$, ou encore $4B = \frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$, et donc $B = \frac{3}{20}$ (les valeurs sont simples non, aucune raison de se plaindre de calculs complexes !). La solution recherchée au problème de Cauchy posé est donc la suivante :
$y(x) = \frac{3\sqrt{3}(3x - 4x^3)}{5\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(4x^2 - 1)}{20} - \frac{2}{5}x$.