TD n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 novembre 2017

Exercice 1

1. Plusieurs méthodes possibles, par exemple $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{i(1+\sqrt{5})}{2} \in i\mathbb{R}$, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, ce qui prouve bien que le triangle ABC est rectangle en A.
2. On sait que la similitude a une équation de la forme $f(z) = az + b$. Comme $f(B) = A$, on a la première équation $-1-i = a(1-i)+b$, et $f(A) = C$ implique de même $-1+i\sqrt{5} = a(-1-i)+b$. En soustrayant ces deux équations, on trouve $i(\sqrt{5}+1) = -2a$, soit $a = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i$. On en déduit alors $b = -1 - i + (i-1)a = -1 - i + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}i$. Conclusion : $f(z) = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}iz + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(1+i)$.
3. Le rapport de la similitude est obtenu en calculant $\left|-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i\right| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le coefficient devant z étant imaginaire pur et « négatif », l'angle de la similitude vaut $-\dfrac{\pi}{2}$.
4. (a) A étant l'image de B par une similitude de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, le triangle $AB\Omega$ est rectangle en Ω. Cela suffit à assurer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

   (b) On peut se contenter de signaler que $A\Omega B$ et $A\Omega C$ sont deux triangles rectangles en Ω pour en déduire que B, C et Ω sont alignés. Calculons quand même l'affixe du point Ω, qui correspond au point fixe de l'application f : si $f(z) = z$, alors $z\left(1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(1+i)$, soit $z = \dfrac{(\sqrt{5}-1)(1+i)}{2+(1+\sqrt{5})i} = \dfrac{(\sqrt{5}-1)(1+i)(2-(1+\sqrt{5})i)}{4+(1+\sqrt{5})^2} = \dfrac{2\sqrt{5}-2+2i\sqrt{5}-2i-4i+4}{10+2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}+1+i(\sqrt{5}-3)}{5+\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)(5-\sqrt{5})}{25-5} + \dfrac{(\sqrt{5}-3)(5-\sqrt{5})}{25-5}i = \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} - 1\right)i = z_\Omega$.
   On peut ensuite calculer $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B\Omega}) = \mathrm{Im}((\overline{z_C - z_B}) \times (z_\Omega - z_B))$
   $= \mathrm{Im}\left((-2-i(\sqrt{5}+1))\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}} - 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}i\right)\right) = -\dfrac{4}{\sqrt{5}} - 1 + \sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} + 1 = 0$, ce qui prouve la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B\Omega}$, et donc l'alignement des trois points.
5. (a) On peut appliquer exactement le même raisonnement qu'à la question précédente. Calculons tout de même l'affixe du point D à l'aide de l'expression de f obtenue à la question 2 : $f(-1+i\sqrt{5}) = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(-\sqrt{5}-i) + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(1+i) = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}i + \dfrac{\sqrt{5}}{2}i + \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}i - \dfrac{1}{2}i = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5}i = z_D$. On peut alors calculer $z_D - z_A = \sqrt{5} + 3 + (1+\sqrt{5})i$, et $z_\Omega - z_A = \dfrac{1}{\sqrt{5}} + 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}i$, puis $\mathrm{Im}((\overline{z_D - z_A})(z_\Omega - z_A)) = (\sqrt{5}+3) \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} - (1+$

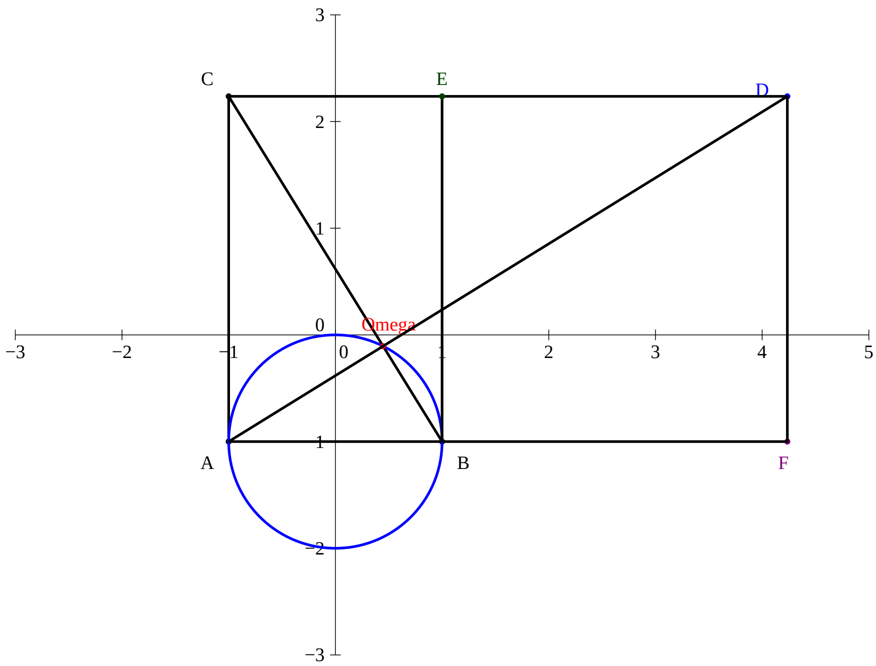
$\sqrt{5})\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2 + \frac{6}{\sqrt{5}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1 = 0$, ce qui prouve l'alignement des points A, D et Ω.

(b) Pas vraiment besoin de calcul, z_A et z_B d'une part, z_C et z_D d'autre part ont la même partie imaginaire, ce qui prouve que les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles à l'axe réel, et donc parallèles entre elles. De plus, $z_D - z_C = \sqrt{5}+3$, ce qui donne la valeur de la distance CD.

6. (a) Pas vraiment de calcul encore une fois, ce projeté a simplement la même abscisse que le point B et la même ordonnée que le point C (ou que le point D), donc $z_E = 1 + i\sqrt{5}$.

(b) On n'en a pas vraiment besoin mais calculons l'affixe du point F : $f(1+i\sqrt{5}) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}(i-\sqrt{5}) + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(1+i) = -\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{5}}{2}i + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i - \frac{1}{2}i = 2 + \sqrt{5} - i = z_F$. Le point F ayant la même abscisse que D et la même ordonnée que B, le quadrilatère $BEDF$ est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. De plus, $BE = ED = 1 + \sqrt{5}$, ce qui prouve que le quadrilatère est en fait un carré.

7. Voila, ça manque un peu de couleurs mais c'est assez complet :



Exercice 2

1. Non, il n'y a aucune raison que ça change !
2. Les deux fonctions sont périodiques de période $2i\pi$. En effet, $e^{z+2i\pi} = e^z \times e^{2i\pi} = e^z$, et $e^{-z-2i\pi} = e^{-z}$. Par ailleurs, $\mathrm{ch}(z+i\pi) = \frac{e^z e^{i\pi} + e^{-z}e^{-i\pi}}{2} = \frac{-e^z - e^{-z}}{2} = -\mathrm{ch}(z)$; et $\mathrm{sh}(z+i\pi) = \frac{e^z e^{i\pi} - e^{-z}e^{i\pi}}{2} = \frac{-e^z + z^{-z}}{2} = -\mathrm{sh}(z)$.
3. (a) On sait que, quel que soit le réel b, le conjugué de e^{ib} est e^{-ib}. On en déduit, en notant $z = a + ib$, que $e^{\bar{z}} = e^{a-ib} = e^a e^{-ib} = e^a\overline{e^{ib}} = \overline{e^z}$ (le réel e^a étant son propre conjugué). Les deux formules demandées en découlent immédiatement.

   (b) C'est le même calcul que pour les fonction réelles correspondantes : $\mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = \frac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z}-2+z^{-2z}}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

(c) Commençons par écrire $\operatorname{ch}(z)$ sous forme algébrique :
$\operatorname{ch}(z) = \dfrac{e^x e^{iy} + e^{-x}e^{-iy}}{2} = \dfrac{e^x\cos(y) + ie^x\sin(y) + e^{-x}\cos(y) - ie^{-x}\sin(y)}{2}$.
Ensuite, $4|\operatorname{ch}(z)|^2 = ((e^x + e^{-x})\cos(y))^2 + ((e^x - e^{-x})\sin(y))^2 = e^{2x}\cos^2(y) + 2\cos^2(y) + e^{-2x}\cos^2(y) + e^{2x}\sin^2(y) - 2\sin^2(y) + e^{-2x}\sin^2(y) = e^{2x} + e^{-2x} + 2(\cos^2(y) - \sin^2(y)) = 2\operatorname{ch}(2x) + 2\cos(2y)$, soit $|\operatorname{ch}(z)|^2 = \dfrac{\operatorname{ch}(2x) + \cos(2y)}{2}$. On calcule de même $4|\operatorname{sh}(z)|^2 = ((e^x - e^{-x})\cos(y))^2 + ((e^x + e^{-x})\sin(y))^2 = e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos^2(y) + 2\sin^2(y) = 2\operatorname{ch}(2x) - 2\cos(2y)$, donc $|\operatorname{sh}(z)|^2 = \dfrac{\operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)}{2}$.

(d) En brutalisant salement : $\operatorname{ch}(z)\operatorname{ch}(z') + \operatorname{sh}(z)\operatorname{sh}(z')$
$= \dfrac{(e^z + e^{-z})(e^{z'} + e^{-z'}) + (e^z - e^{-z})(e^{z'} - e^{-z'})}{4}$
$= \dfrac{e^{z+e'} + e^{z-z'} + e^{z'-z} + e^{-z-z'} + e^{z+z'} - e^{z-z'} - e^{z'-z} + e^{-z-z'}}{4}$
$= \dfrac{e^{z+z'} + e^{-z-z'}}{2} = \operatorname{ch}(z + z')$. C'est quasiment la même chose pour l'autre calcul : $\operatorname{ch}(z)\operatorname{sh}(z') + \operatorname{sh}(z)\operatorname{ch}(z')$
$= \dfrac{(e^z + e^{-z})(e^{z'} - e^{-z'}) + (e^z - e^{-z})(e^{z'} + e^{-z'})}{4}$
$= \dfrac{e^{z+z'} - e^{z-z'} + e^{z'-z} - e^{-z-z'} + e^{z+z'} + e^{z-z'} - e^{z'-z} - e^{-z-z'}}{4}$
$= \dfrac{e^{z+z'} - e^{-z-z'}}{2} = \operatorname{sh}(z + z')$.

4. (a) On sait que $\operatorname{ch}(z) = 0$ revient à dire que $e^z = -e^{-z}$. N'allez pas prétendre que c'est impossible car les exponentielles sont positives, on est dans $\mathbb{C}$. Notons donc $z = x + iy$, on doit donc avoir $e^x e^{iy} = -e^{-x}e^{-iy} = e^{-x}e^{-iy+i\pi}$. Les deux membres étant désormais mis sous forme exponentielle, leur égalité se résume à l'égalité des modules $e^x = e^{-x}$ et à celle des arguments $y \equiv \pi - y[2\pi]$. On en déduit $x = 0$ et $y \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, soit $z = i\dfrac{\pi}{2} + ik\pi$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ (toutes les valeurs de k donnent bien des z différents ici !).
L'équation $\operatorname{sh}(z) = 0$ se traite de la même façon : $e^x e^{iy} = e^{-x}e^{-iy}$, donc $e^x = e^{-x}$ (qui donne $x = 0$), et $y \equiv -y[2\pi]$ qui implique $y \equiv 0[\pi]$. Finalement, $z = ik\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

(b) On cherche à résoudre l'équation $e^z + e^{-z} = 2$. Commençons par poser $Z = e^z$, on doit avoir $Z + \dfrac{1}{Z} = 2$, soit $Z^2 - 2Z + 1 = 0$. On reconnait une identité remarquable qui permet d'en déduire que $Z = 1$. Autrement dit, on s'est ramenés à résoudre l'équation $e^z = e^x e^{iy} = 1$. Comme dans la question précédente, on utilise l'égalité des modules et des arguments pour obtenir $e^x = 1$, soit $x = 0$; et $y \equiv 0[2\pi]$. On trouve donc $2ik\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. De même, l'équation $\operatorname{ch}(z) = i$ peut s'écrire $Z^2 - 2iZ + 1 = 0$. On peut factoriser cette équation sous la forme $(Z - i)^2 + 2 = 0$, soit $(Z - i)^2 = -2 = (i\sqrt{2})^2$. On en déduit les deux solutions possibles $Z_1 = i - i\sqrt{2}$ et $Z_2 = i + i\sqrt{2}$. Commençons par traiter le cas où $e^z = Z_2$, soit $e^x e^{iy} = i + i\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{2}}$. On doit donc avoir $x = \ln(1 + \sqrt{2})$, et $y \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, soit $z = \ln(1 + \sqrt{2}) + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$. On obtient de même pour la condition $e^z = Z_1$ les solutions $z = \ln(\sqrt{2} - 1) + i\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ (attention ici au fait que $1 - \sqrt{2} < 0$, il faut rajouer un π dans l'argument pour changer le signe).

(c) On peut tenter la même approche qu'à la question précédente : l'équation $Z^2 - 2aZ + 1 = 0$, avec a un réel quelconque, aura pour discriminant $\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1)$. Si $a \geq 1$, on trouve donc deux possibilités réelles pour Z, et réciproquement, si e^z est réel, il est clair que $\operatorname{ch}(z)$ le sera aussi. Par contre, si $a \in]-1, 1[$, $\Delta < 0$, et les solutions de l'équation sont de la forme $Z = \dfrac{2a \pm i\sqrt{1 - a^2}}{2} = a \pm i\sqrt{1 - a^2}$. La condition $e^z \in \mathbb{R}$ est vérifiée si $y \equiv 0[\pi]$ (en notant toujours $z = x + iy$). Dans le cas où $a \in]-1, 1[$, l'équation $e^z = a + i\sqrt{1-a^2}$ donne $e^x \cos(y) = a$ et $e^x \sin(y) = \sqrt{1-a^2}$, soit en passant au carré du module $e^{2x}(\cos^2(y) + \sin^2(y)) = a^2 + 1 - a^2 = 1$, donc $e^{2x} = 1$. On a donc nécessairement $x = 0$, et les conditions deviennent alors simplement $\cos(y) = a$ et $\sin(y) = \sqrt{1-a^2}$, soit $y \equiv \arccos(a)[2\pi]$ (l'égalité est alors automatiquement vérifiée pour le sinus, qui est toujours positif). Autrement dit, $z = i\arccos(a) + 2ik\pi$. De même, lorsque $e^z = a - i\sqrt{1-a^2}$, on trouve $x = 0$ et $y = -\arccos(a) + 2k\pi$ (seul le signe du sinus change). Si on regroupe toutes ces valeurs, on se rend compte qu'elles parcourent simplement l'axe imaginaire pur. Ce n'est pas une surprise : si $z = bi$, alors $\mathrm{ch}(z) = \dfrac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} = \cos(b)$, qui appartient certainement à $\mathbb{R}$!