TD n°4 : un peu de rab sur les complexes

PTSI B Lycée Eiffel

23 novembre 2017

Exercice 1

On considère dans les plan complexe les points $A(-1-i)$, $B(1-i)$ et $C(-1+i\sqrt{5})$.

1. Vérifier que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Donner l'expression complexe de l'unique similitude f vérifiant $f(B) = A$ et $f(A) = C$.
3. Préciser le rapport et l'angle de cette similitude.
4. On note Ω le centre de la similitude f.
   (a) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$.
   (b) Montrer que les points B, C et Ω sont alignés.
5. On note D l'image de C par la similitude f.
   (a) Montrer que A, Ω et D sont alignés.
   (b) Montrer que les droites (CD) et (AB) sont parallèles, et que $CD = 3+\sqrt{5}$.
6. On note E le projeté orthogonal de B sur la droite (CD).
   (a) Calculer l'affixe du point E.
   (b) On note $F = f(E)$, quelle est la nature du quadrilatère $BFDE$?
7. Faire une figure (où on placera bien sûr tous les points définis dans cet exercice, ainsi que les droites et autres ensembles remarquables croisés lors des calculs).

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à étendre les fonctions ch et sh au plan complexe en posant, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{ch}(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, et $\mathrm{sh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

1. La parité des fonctions ch et sh est-elle modifiée par ce prolongement au plan complexe ?
2. Vérifier que, sur $\mathbb{C}$, ch et sh sont des fonctions périodiques (on en précisera une période). Calculer $\mathrm{ch}(z+i\pi)$ et $\mathrm{sh}(z+i\pi)$ en fonction de $\mathrm{ch}(z)$ et $\mathrm{sh}(z)$.
3. Quelques formules faisant intervenir les fonctions ch et sh :
   (a) Démontrer que, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{ch}(\bar{z}) = \overline{\mathrm{ch}(z)}$, et $\mathrm{sh}(\bar{z}) = \overline{\mathrm{sh}(z)}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = 1$.
   (c) En posant $z = x+iy$, montrer que $|\mathrm{ch}(z)|^2 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(2x)+\cos(2y))$. Démontrer une formule similaire pour $|\mathrm{sh}^2(z)|$.
   (d) Démontrer les formules d'addition $\mathrm{ch}(z+z') = \mathrm{ch}(z)\,\mathrm{ch}(z') + \mathrm{sh}(z)\,\mathrm{sh}(z')$, et $\mathrm{sh}(z+z') = \mathrm{ch}(z)\,\mathrm{sh}(z') + \mathrm{sh}(z)\,\mathrm{ch}(z')$.
4. Quelques équations faisant intervenir ch et sh :
   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\mathrm{ch}(z) = 0$ et $\mathrm{sh}(z) = 0$.
   (b) Déterminer tous les nombres complexes vérifiant $\mathrm{ch}(z) = 1$, puis ceux pour lesquels $\mathrm{ch}(z) = i$.
   (c) Plus généralement, déterminer tous les nombres complexes pour lesquels $\mathrm{ch}(z) \in \mathbb{R}$.