TD n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 octobre 2017

Exercice 1

1. Notons donc P_n la propriété : $n(n^2+5)$ est divisible par 6. Commençons par vérifier la propiété au rang 1 : $1\times(1^2+5) = 6$ est divisible par 6 donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vraie et calculons $(n+1)((n+1)^2+5) = (n+1)(n^2+2n+6) = n^3+3n^2+8n+6 = n(n^2+5)+3n^2+3n+6$. Par hypothèse de récurrence, $n(n^2+5)$ est divisible par 6. De plus, $3n^2+3n+6 = 3(n^2+n+2)$ est divisible par 3, et $n^2+n+2 = n(n+1)+2$ est un entier pair (soit n, soit $n+1$ est pair, donc $n(n+1)$ est pair) donc $3(n^2+n+2)$ est divisible par 6. Finalement, $(n+1)((n+1)^2+5)$ est divisible par 6, ce qui prouve la propriété P_{n+1} et achève la récurrence.
2. On commence bien sûr par poser $X = \cos(x)$ pour se ramener à l'équation du troisième degré $2X^3+X^2-5X+2 = 0$. Cette équation a pour racine évidente $X = 1$, on peut donc factoriser son membre de gauche sous la forme $(X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c$. Par identification des coefficients, on obtient les conditions $a = 2$; $b-a = 1$, donc $b = 3$ et $c-b = -5$ donc $c = -2$. Reste à chercher les racines du deuxième facteur $2X^2+3X-2$, qui a pour discriminant $\Delta = 8+16 = 25$, et admet donc deux racines $X_1 = \dfrac{-3-5}{4} = -2$ et $X_2 = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}$. On est donc ramenés à l'une des trois possibilités suivantes : $\cos(x) = 1$ donne $x \equiv 0[2\pi]$; $\cos(x) = -2$ est impossible ; et $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ donne $x \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.
3. Notons S la somme à calculer. On peut distinguer des cas selon que $i \geq j$ (dans ce cas, le minimum est égal à j) ou que $j \geq i$ (le minimum est alors égal à i), mais il faut faire attention à ne pas compter deux fois les cas où $i = j$. Écrivons par exemple $S = \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} i + \sum_{1\leq j<i\leq nj} + \sum_{1\leq i=j\leq ni}$. Les deux premières sommes sont égales, et la dernière est en fait une somme simple bien connue, donc $S = 2\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} i + \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n} j^2 - j + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Le reste se simplifie, on n'a même pas besoin de calcul supplémentaire, c'est merveilleux.
4. L'équation proposée est définie seulement sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et implique certainement l'équation suivante : $\cos(\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3})) = 1$. En utilisant la formule d'addition des cosinus on obtient alors $\cos(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x\sqrt{3})) + x^2\sqrt{3} = 0$. Or, $\cos^2(\arcsin(x)) = 1-\sin^2(\arcsin(x)) = 1-x^2$ donc $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (la fonction arcsin étant à valeurs dans un intervalle sur lequel le cosinus est toujours positif). On a donc $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-3x^2} + \sqrt{3}x^2 = 0$. Cette équation implique à son tour (en passant le $\sqrt{3}x^2$ à droite et en élevant au carré) que $(1-x^2)(1-3x^2) = 3x^4$, soit $1-4x^2 = 0$. Cette dernière équation ayant pour solutions $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = -\dfrac{1}{2}$, il ne reste plus qu'à vérifier si ces deux valeurs sont solutions ou

non de l'équation initiales. On calcule donc $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$. Par contre $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$. La seule solution de l'équation est donc $x=\frac{1}{2}$ (une autre façon de voir qu'il n'y a qu'une seule solution est de constater que la fonction $f : x \mapsto \arcsin(x)+\arcsin(x\sqrt{3})$ est strictement croissante sur son domaine de définition).

5. Calculons donc $S=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}2^i=\sum_{j=0}^{n}\frac{1-2^{j+1}}{1-2}=\sum_{j=0}^{n}2\times 2^j-1=2\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}-(n+1)=2^{n+2}-n-3$. Par ailleurs, $S=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}2^i=\sum_{i=0}^{n}(n-i+1)2^i=(n+1)\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}-\sum_{i=0}^{n}i2^i=(n+1)2^{n+1}-n-1-T$, où T est justement la somme qu'on cherche à calculer. En comparant les deux formules, on a donc $2^{n+2}-n-3=(n+1)2^{n+1}-n-1-T$, soit $T=(n+1)2^{n+1}-2^{n+2}+2=(n-1)2^{n+1}+2$. Démontrons désormais par récurrence la propriété $P_n : \sum_{k=0}^{n}k2^k=(n-1)2^{n+1}+2$. Au rang 0, le membre de gauche est nul, et celui de droite vaut $-2+2=0$, donc P_0 est vraie. Supposons désormais P_n vraie, alors $\sum_{k=0}^{n+1}k2^k=\sum_{k=0}^{n}k2^k+(n+1)2^{n+1}=(n-1)2^{n+1}+2+(n+1)2^{n+1}=2n\times 2^{n+1}+2=n2^{n+2}+2$, ce qui est exactement la formule à démontrer pour P_{n+1}. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 2

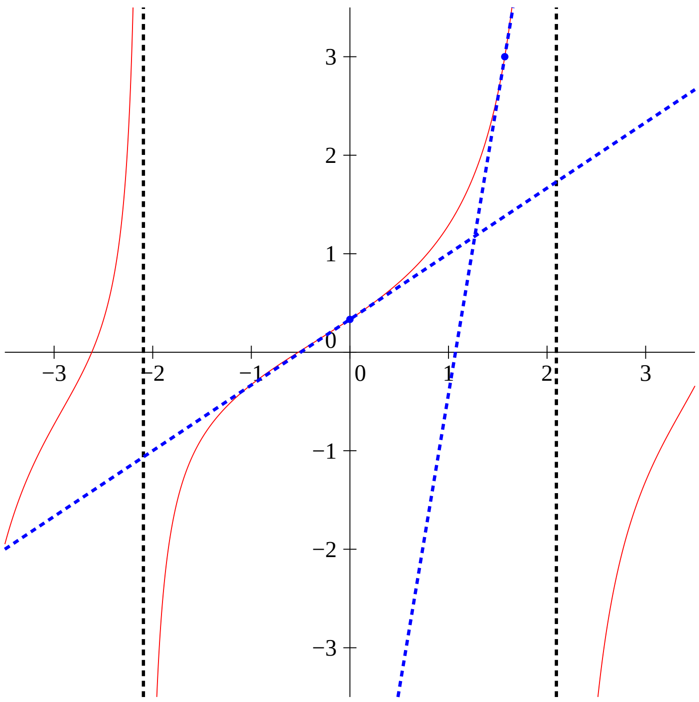
1. La fonction f n'est pas définie pour les réels vérifiant $2\cos(x)+1=0$, soit $\cos(x)=-\frac{1}{2}$, ce qui se produit lorsque $x\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$, ou $x\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.
2. On peut calculer $f(-x)=\frac{1-2\sin(x)}{1+2\cos(x)}$, la fonction ne semble ni paire ni impaire. Vérifions quand même : $f(0)=\frac{1}{3}$, la fonction ne peut pas être impaire (une fonction impaire définie en 0 s'y annule toujours). De plus, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ et $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, la fonction ne peut pas être paire. Par contre, f est bien sûr 2π-périodique, on peut donc l'étudier sur $[-\pi,\pi]$ (intervalle sur lequel on aura deux valeurs interdites).
3. On a déjà calculé ci-dessus $f(0)=\frac{1}{3}$ et $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$. Continuons : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\sqrt{3}-1$, et $f\left(\frac{13\pi}{4}\right)=f\left(\frac{13\pi}{4}-4\pi\right)=f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}+1}=1$.
4. Il s'agit de résoudre l'équation $\frac{2\sin(x)+1}{2\cos(x)+1}=1$, soit $2\sin(x)+1=2\cos(x)+1$, ce qui se ramène tout simplement à $\sin(x)=\cos(x)$. Les solutions de cette équation sont les réels de la forme $x\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$, et $x\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

5. La fonction f est dérivable partout où elle est définie, et $f'(x) = \dfrac{2\cos(x)(2\cos(x)+1) + 2\sin(x)(2\sin(x)+1)}{(2\cos(x)+1)^2} = \dfrac{4 + 2(\cos(x)+\sin(x))}{(2\cos(x)+1)^2}$. Or, $\cos(x) + \sin(x)$ est toujours supérieur à -2 (chacun des deux termes de la somme est supérieur ou égal à -1), donc notre dérivée est toujours positive. Elle l'est même strictement car $\cos(x) + \sin(x) > -2$ (pour avoir égalité, il faudrait avoir simultanément $\cos(x) = \sin(x) = -1$, ce qui ne se produit jamais. Notre fonction est donc strictement croissante sur chacun de ses intervalles de définition (il y en a trois à l'intérieur de l'intervalle d'étude $[-\pi, \pi]$). Les calculs de limite ne posent aucun problème, détaillons-en un seul : $\displaystyle\lim_{x \to \frac{2\pi}{3}^+} 2\sin(x) + 1 = \sqrt{3}$ et $\displaystyle\lim_{x \to \frac{2\pi}{3}^+} 2\cos(x) + 1 = 0^-$ (le cosinus devient inférieur à $-\dfrac{1}{2}$), donc $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$. On obtient finalement le tableau suivant, en ajoutant simplement $f(-\pi) = f(\pi) = -1$:

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$		$+$	$\|$	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-1

6. On a déjà calculé $f(0) = \dfrac{1}{3}$. De plus, $f'(0) = \dfrac{4+2}{3^2} = \dfrac{2}{3}$, l'équation de la tangente à la courbe en 0 est donc $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$. De même, on a déjà calculé $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$, et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4+2}{1^2} = 6$, donc cette tangente a pour équation $y = 6\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 3 = 6x + 3 - 3\pi$.

7. Voici la courbe demandée (les tangentes sont en bleu, et bien sûr rien n'empêche de placer correctement les points correspondant aux valeurs calculées aux questions 3 et 4) :



Exercice 3

1. Sans difficulté, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

2. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition, et $f'(x) = \dfrac{4x(4x^2-1) - 8x(2x^2+1)}{(4x^2-1)^2} = -\dfrac{12x}{(4x^2-1)^2}$. On calcule $f(0) = -1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ (quotient des termes de plus haut degré), $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$ (le dénominateur est négatif à gauche de $\frac{1}{2}$) et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$. Les limites en $-\frac{1}{2}$ sont symétriques, la fonction f étant de toute façon paire. Voilà le tableau complet :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

3. Une fonction paire peut difficilement être injective, par exemple $f(-1) = f(1) = 1$. Elle n'est pas non plus surjective, le réel 0 n'ayant par exemple pas d'antécédent par la fonction f. Pour trouver une bijection sur des ensembles les plus grands possibles, on va commencer par prendre $B =]-\infty, -1] \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ (tous les réels ayant au moins un antécédent par f), et pour empêcher les doublons au niveau des antécédents, on restreint l'ensemble de départ à $A = \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

4. Partons donc de l'équation $\dfrac{2x^2+1}{4x^2-1} = y$, soit $2x^2+1 = 4x^2y - 4y$. On obtient alors $x^2(4y-2) = 4y+1$, soit $x^2 = \dfrac{4y+1}{4y-2}$. Cette équation n'aura des solutions que si le membre de droite est positif, ce qui se produit exactement si $y \in B$ (on fait un tableau de signe pour justifier si on y tient). Quand $y - 1$, la solution unique de l'équation est $x = 0$. Par contre, si $y \in B\backslash\{-1\}$, il y aura deux solutions opposées à l'équation, on impose donc de ne garder que la solution strictement positive, ce qui revient à imposer que $x \in A$.

5. Puisqu'on ne garde que la solution positive de l'équation obtenue à la question précédente, on pose donc $x = \sqrt{\dfrac{4y+1}{4y-2}}$. On aura donc $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{4x+1}{4x-2}}$.

Exercice 4

1. La fonction arctan étant définie partout, la seule condition à vérifier est l'annulation du dénominateur, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$.

2. Il faut donc résoudre l'équation $\arctan\left(\dfrac{2-2x}{2x-x^2}\right) = \dfrac{\pi}{6} = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. La fonction arctan étant bijective, cette équation est équivalente à $\dfrac{2-2x}{2x-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, soit $2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x = 2x - x^2$, ou encore $x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4(1+\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{3} = 4(1+2\sqrt{3}+3-2\sqrt{3}) = 16$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{2(1+\sqrt{3})-4}{2} = \sqrt{3}-1$, et $x_2 = \dfrac{2(1+\sqrt{3})+4}{2} = \sqrt{3}+3$.

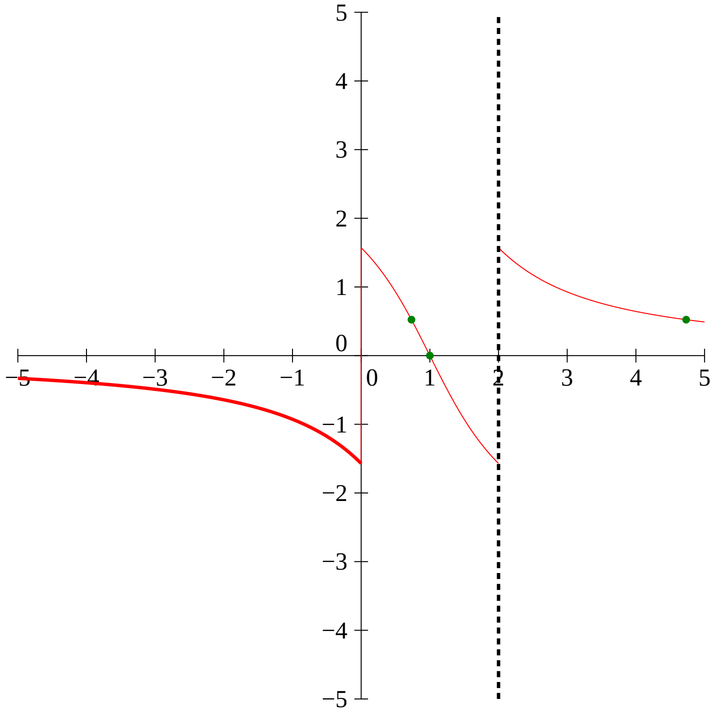
3. Il suffit de constater que $\dfrac{2-2(2-x)}{2(2-x)-(2-x)^2} = \dfrac{2x-2}{-x^2+2x} = -\dfrac{2-2x}{2x-x^2}$. La fonction arctan étant impaire, on aura bien $f(2-x) = -f(x)$. Le réel $2-x$ est symétrique sur l'axe des abscisses du réel x par rapport à la valeur 1, la courbe sera donc symétrique par rapport au point de coordonnées $(1,0)$ (par exemple, $f(3) = -f(-1)$, et 3 et -1 sont deux valeurs symétriques par rapport à 1).

4. La question précédente permet en fait de ne calculer que la moitié des limites. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2-2x}{2x-x^2} = 0$ (quotient des termes de plus haut degré), on aura $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2-2x}{2x-x^2} = -\infty$ (le numérateur tend vers 2, et le dénominateur est négatif en-dehors de ses racines), alors $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$. De même, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, et les limites sont les mêmes en 2 (le dénominateur est positif à gauche et négatif à droite de 2, mais le numérateur tend vers une limite négative).

5. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition. Posons $u(x) = \dfrac{2-2x}{2x-x^2}$, alors $u'(x) = \dfrac{-2(2x-x^2)-(2-2x)^2}{(2x-x^2)^2} = \dfrac{-4x+2x^2-4+8x-4x^2}{(2x-x^2)^2} = \dfrac{-2x^2+4x-4}{(2x-x^2)^2} = \dfrac{-2(x^2-2x+2)}{(2x-x^2)^2}$.
La parenthèse du numérateur a un discriminant négatif, elle est toujours positive, on en déduit que $u'(x)$ est toujours négatif, et donc $f'(x)$ aussi puisque la fonction arctangente est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Mais comme on nous a demandé de calculer f', on va le faire quand même : $f(x) = \arctan(u(x))$, donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)} = \dfrac{-2(x^2-2x+2)}{(2x-x^2)^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{(2-2x)^2}{(2x-x^2)^2}} = \dfrac{-2(x^2-2x+2)}{(2x-x^2)^2+(2-2x)^2}$, qui est effectivement toujours négatif. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ ‖ $-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ ‖ $-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0

6. On peut ajouter le fait que $f(1) = 0$, et essayer de mettre au bon endroit les antécédents de la question 2 :



7. Le dénominateur de f' peut se développer sous la forme $4x^2 - 4x^3 + x^4 + 4 - 8x + 4x^2 = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$. Notre seul espoir de simplification est que ce dénominateur soit divisible par le $x^2 - 2x + 2$ qui est au numérateur. Effectuons donc la division euclidienne :

$$\begin{array}{cccccccccccc|l}
 & x^4 & - & 4x^3 & + & 8x^2 & - & 8x & + & 4 & & x^2 - 2x + 2 \\ \cline{12-12}
- & (x^4 & - & 2x^3 & + & 2x^2) & & & & & & x^2 - 2x + 2 \\
 & & & -2x^3 & + & 6x^2 & - & 8x & + & 4 & & \\
 & & - & (-2x^3 & + & 4x^2 & - & 4x) & & & & \\
 & & & & & 2x^2 & - & 4x & + & 4 & & \\
 & & & & - & (2x^2 & - & 4x & + & 4) & & \\
 & & & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Incroyable, on a en fait $f'(x) = \dfrac{-2(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \dfrac{-2}{x^2 - 2x + 2} = \dfrac{-2}{1 + (x-1)^2}$, qui n'est autre que la dérivée de la fonction $g : x \mapsto -2\arctan(x-1)$. Sur chacun de ses intervalles de définition, on a donc $f(x) = -2\arctan(x-1) + K$. Il faut toutefois séparer les trois intervalles pour la détermination de la constante K. Sur $]0, 2[$, on doit avoir $f(1) = 0 = g(1) + K = 0 + K$, donc la constante est nulle et on a simplement $f(x) = -2\arctan(x-1)$ lorsque $x \in]0, 2[$. Sur les deux autres intervalles, le plus simple est d'utiliser la limite en $\pm\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -2 \times \dfrac{\pi}{2} = -\pi$. On doit donc avoir $K = \pi$, et $f(x) = \pi - 2\arctan(x-1)$ si $x > 2$. De même, $f(x) = -2\arctan(x-1) - \pi$ si $x < 0$.

8. On a vu à la question 2 que $f(\sqrt{3} - 1) = \dfrac{\pi}{6}$. Comme $\sqrt{3} - 1 \in]0, 2[$, la question précédente prouve que $-2\arctan(\sqrt{3} - 1 - 1) = \dfrac{\pi}{6}$, soit $\arctan(\sqrt{3} - 2) = -\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que $\sqrt{3} - 2 = \tan\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$, et en utilisant l'imparité de la tangente, on obtient $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

9. Si $x \in]0, 2[$, on a $1 - x \in]-1, 1[$, et on peut donc effectuer le changement de variable indiqué, avec un angle θ appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$. On calcule alors $\dfrac{2 - 2x}{2x - x^2} = \dfrac{2 - 2(1 - \tan(\theta))}{2 - 2\tan(\theta) - (1 - \tan(\theta))^2} = \dfrac{-2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} = \tan(-2\theta)$. Comme 2θ appartient exactement à

l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (quel coup de pot !), on peut conclure que $f(x) = \arctan(\tan(-2\theta)) = -2\theta = -2\arctan(1-x)$.