TD n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

21 septembre 2017

Exercice 1

1. On passe tout du même côté et on met au même dénominateur (sans le développer !) pour obtenir $\dfrac{(2x+3)(2x-3)-4x(x-1)}{(x-1)(2x-3)} \leq 0$, soit $\dfrac{4x-9}{(x-1)(2x-3)} \leq 0$. Il ne reste plus qu'à faire un tableau de signes :

x		1		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{4}$	
$4x-9$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)(2x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{4x-9}{(x-1)(2x-3)}$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

On peut conclure : $\mathcal{S} =]-\infty, 1[\cup \left]\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right]$.

2. On commence par tout écrire à base d'exponentielles : $e^x + e^{-x} + 2e^x - 2e^{-x} = 2$, soit $3e^x - 2 - e^{-x} = 0$. En multipliant tout par e^x et en posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation du second degré $3X^2 - 2X - 1 = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$ et admet deux racines $X_1 = \dfrac{2-4}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $X_2 = \dfrac{2+4}{6} = 1$. La première valeur aobtenue n'est pas possible vu le changement de variable effectué, la seule solution restante est donc $x = \ln(1) = 0$.

3. Le plus simple est de tout faire passer du même côté et de faire un tableau :

x		0		1	
$\lvert 1-x \rvert$	$1-x$		$1-x$	0	$x-1$
$\lvert 2x \rvert$	$-2x$	0	$2x$		$2x$
$\lvert 1-x \rvert - \lvert 2x \rvert + 3$	$x+4$		$4-3x$		$2-x$

On peut maintenant résoudre sur chaque intervalle : sur $]-\infty, 0]$, l'inéquation devient $x+4 \leq 0$, soit $x \leq -4$, on conserve donc l'intervalle $]-\infty, -4]$; sur l'intervalle $[0,1]$, on est ramenés à résoudre $4 - 3x \leq 0$, soit $x \geq \dfrac{4}{3}$, ce qui ne se produit jamais sur cet intervalle ; enfin, sur $[1, +\infty[$, on se ramène à $2 - x \leq 0$, soit $x \geq 2$, et on garde l'intervalle $[2, +\infty[$. Finalement, $\mathcal{S} =]-\infty, -4] \cup [2, +\infty[$.

4. Essayons de faire le calcule dans l'autre sens, on souhaite obtenir un membre de gauche à l'équation de la forme $aX^2 + bX + c = a\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + b\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + c = ax^2 + 2a + \dfrac{a}{x^2} + bx + \dfrac{b}{x} + c = \dfrac{ax^4 + bx^3 + (2a+c)x^2 + bx + a}{x^2}$. Comme 0 n'est pas solution de l'équation initiale (ce qui est indispensable pour avoir le droit de faire ce changement de variable, une multiplication ou une division par x^2 ne changera pas les solutions, et notre second membre est donc équivalent à celui de l'équation de départ dès que $a = 1$, $b = 2$ et $2a + c = -1$ (par identification, les deux dernières conditions étant identiques aux deux premières). On est donc ramenés à la résolution de l'équation équivalent $X^2 + 2X - 3 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$,

et admet donc pour solutions $X_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ et $X_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$. Il reste à remonter jusqu'aux valeurs de x : si $x + \dfrac{1}{x} = X_1 = -3$, alors $x^2 + 3x + 1 = 0$, cette équation a pour discriminant $\Delta = 9 - 4 = 5$ et admet comme racines $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$. De même on aura $x + \dfrac{1}{x} = 1$ si $x^2 - x + 1 = 0$, ce qui donne $\Delta = -3$, donc pas d'autre solution réelle. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Exercice 2

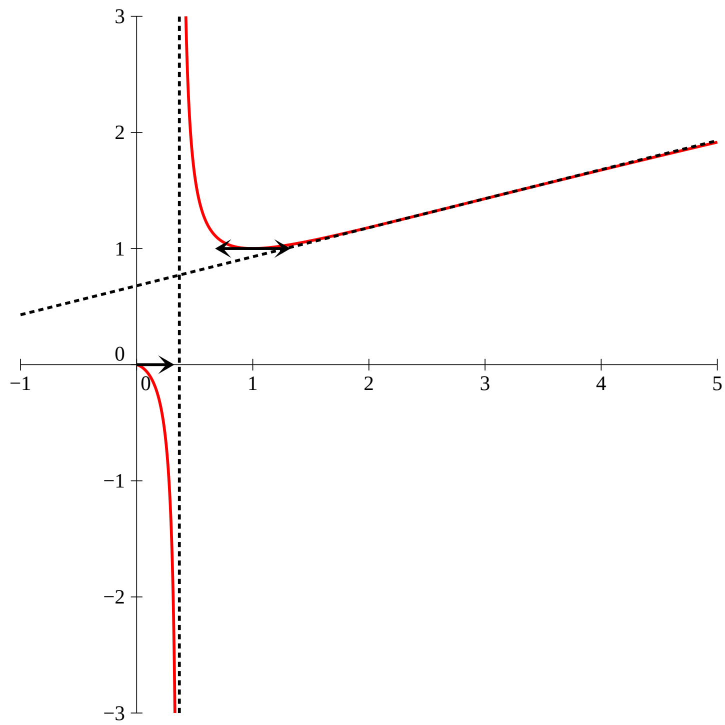
1. La fonction f est définie quand $x > 0$ (à cause du ln) et quand $1 + \ln(x) \neq 0$, soit $x \neq e^{-1}$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*} \backslash \left\{ \dfrac{1}{e} \right\}$.
2. Il y a donc quatre limites à calculer :
   - $\lim\limits_{x \to 0} 1 + \ln(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée).
   - $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} 1 + \ln(x) = 0^-$, donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty$ (le numérateur a une limite finie positive).
   - $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^+} 1 + \ln(x) = 0^-$, donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$.
   - enfin, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée (le x du numérateur l'emporte sur le $\ln(x)$ du dénominateur, on peut factoriser ce dénominateur par $\ln(x)$ pour être extrêmement rigoureux).
3. La fonction f est sans problème dérivable sur son ensemble de définition, et $f'(x) = \dfrac{1 + \ln(x) - 1}{(1 + \ln(x))^2} = \dfrac{\ln(x)}{(1 + \ln(x))^2}$. Autrement dit, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)$, ce qui permet de dresser le tableau suivant, en calculant en passant $f(1) = 1$:

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour simplifier le calcul de la limite, on peut poser $X = \ln(x)$, de façon à avoir $f'(x) = \dfrac{X}{(1+X)^2}$. Attention tout de même, lorsque x tend vers 0, X va tendre vers $-\infty$. Or, $\lim\limits_{X \to -\infty} \dfrac{X}{(1+X)^2} = 0$ (quotient des termes de plus haut degré), donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$. Il y a donc en 0 une tangente horizontale à la courbe représentative de f.
5. Calculons donc $f(e) = \dfrac{e}{1 + \ln(e)} = \dfrac{e}{2}$, puis $f'(e) = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$. L'équation de la tangente T est donc $y = \dfrac{1}{4}(x - e) + \dfrac{e}{2} = \dfrac{x + e}{4}$. Pour l'étude de la position relative, on veut résoudre l'inéquation $\dfrac{x}{1 + \ln(x)} \geq \dfrac{x + e}{4}$. L'inéquation ne peut pas être vérifiée sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ (ce qui est à gauche est négatif, et à droite c'est positif), dans l'intervalle restant on peut multiplier par le dénominateur pour obtenir $4x \geq (x + e)(1 + \ln(x))$, soit $3x - x\ln(x) - e\ln(x) - e \geq 0$.

Malheureusement, ça ne se résout pas facilement. Posons donc $g(x) = 3x - x\ln(x) - e\ln(x) - e$, on a $g'(x) = 3 - \ln(x) - 1 - \frac{e}{x} = 2 - \ln(x) - \frac{e}{x}$, puis $g''(x) = -\frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} = \frac{e-x}{x^2}$. La fonction g' est donc croissante sur $]0, e]$ et décroissante ensuite, comme $g'(e) = 0$, on en déduit que g' est toujours négative, et que g elle-même est donc décroissante. Comme $g(e) = 0$, on aura $g(x) \geq 0$ sur $]0, e]$, et $g(e) \leq 0$ ensuite. On en déduit que la courbe est au-dessus de sa tangente sur $\left]\frac{1}{e}, e\right]$, et en-dessous sur $[e, +\infty[$.

6. Voici la courbe :



Exercice 3

1. Il faut évidemment que ce qui se trouve sous la racine carrée soit positif, soit $x^2 + mx - 2 \geq 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = m^2 + 8$ (qui est toujours positif, quelle que soit la valeur de m), et a pour racines $x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2+8}}{2}$ et $x_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2+8}}{2}$. L'équation est définie à l'extérieur de ces deux racines (non, je n'ai pas envie d'écrire les deux intervalles).
2. Élevons l'équation au carré (ce n'est pas une équivalence mais peu importe) pour obtenir $x^2 - 2x - 2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$, soit $3x^2 + 6x + 3 = 0$, ou encore $3(x+1)^2 = 0$. La seule solution possible est donc $x = -1$, dont on vérifie facilement qu'elle n'est pas solution de l'équation initiale (elle est dans l'ensemble de définition de l'équation, mais le membre de gauche vaut $\sqrt{1} = 1$, et celui de droite vaut -1 lorsque $x = -1$). Du coup, $\mathcal{S} = \emptyset$.
3. Calculons donc $\Delta = (4-m)^2 - 36 = m^2 - 8m + 16 - 36 = m^2 - 8m - 20 = (m+2)(m-10)$ (la factorisation est facile à trouver si on a la curiosité d'aller regarder la suite de l'énoncé). Si $-2 < m < 10$, le discriminant est strictement négatif et l'équation n'a donc pas de solution. Lorsque $m = -2$, $\Delta = 0$ et il y a une solution unique : $x = \frac{m-4}{6} = -1$. Lorsque $m = 10$, on a également $\Delta = 0$, et une seule solution : $x = \frac{m-4}{6} = 1$. Si $m < -2$ ou $m > 10$, il y aura deux solutions : $x_1 = \frac{m - 4 - \sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}$, et $x_2 = \frac{m - 4 + \sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}$.

4. Commençons par la première inéquation. Elle ne peut jamais être vérifiée si $m < 1$ (le membre de gauche est alors négatif et celui de droite positif). Lorsque $m \geq 1$, on peut élever au carré pour trouver $m^2 - 2m + 1 \geq m^2 - 8m - 20$, soit $6m + 21 \geq 0$, ce qui donne $m \geq -\frac{7}{2}$. Il ne faut garder que les solutions où l'inéquation est définie et où $m \geq 1$, soit $[10, +\infty[$. On procède de même pour la deuxième inéquation : elle est toujours vraie quand $m \geq 1$, et si $m < 1$, on élève au carré pour obtenir de même $m \leq -\frac{7}{2}$. On garde les solutions dans les intervalles $\left]-\infty, -\frac{7}{2}\right]$ et $[10, +\infty[$.
5. On élève l'équation au carré en gardant à l'esprit que les seules solutions valides seront celles pour lesquelles le second membre est initialement positif, c'est-à-dire celles pour lesquelles $x \geq -\frac{1}{2}$. On obtient alors l'équation $x^2 - mx - 2 = 4x^2 + 4x + 1$, qui est exactement l'équation de la question 3. Il reste alors à vérifier que les solutions potentielles de l'équation sont bien supérieures ou égales à $-\frac{1}{2}$, ce qui revient à vérifier que $\frac{m - 4 - \sqrt{(m+2)(m-10)}}{6} \geq -\frac{1}{2}$, soit $m - 4 - \sqrt{(m+2)(m-10)} \geq 3$, c'est la première inéquation de la question 4. Sans surprise, on aura de même $x_2 \geq -\frac{1}{2}$ si la deuxième inéquation de la question 4 est vérifiée. On peut donc distinguer les cas suivants :
   - si $m \in]-2, 10[$, l'équation n'a pas de solutions.
   - si $m \in \left]-\frac{7}{2}, -2\right]$, l'équation n'a toujours pas de solutions car les solutions potentielles ne sont pas dans le bon intervalle.
   - si $m \leq -\frac{7}{2}$, seule la solution x_2 est valable : $\mathcal{S} = \left\{\frac{m - 4 + \sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}\right\}$
   - enfin, si $m \geq 10$, les deux solutions sont valables (il s'agit d'une seule solution double dans le cas particulier où $m = 10$) : $\mathcal{S} = \left\{\frac{m - 4 - \sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}, \frac{m - 4 + \sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}\right\}$.

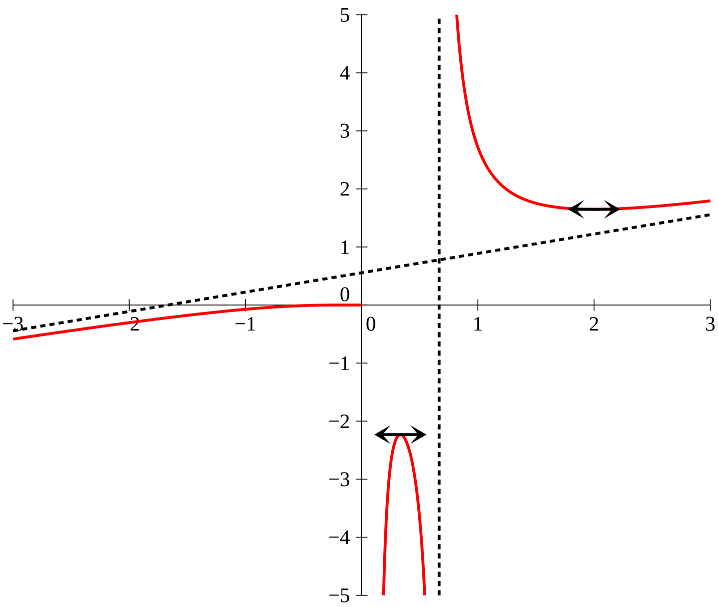
Exercice 4

1. Il faut éliminer les réels 0 (à cause de l'inverse dans l'exponentielle) et $\frac{2}{3}$ (à cause du dénominateur) donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$.
2. La fonction f est dérivable partout où elle est définie, et $f'(x) = \frac{(2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}})(3x - 2) - 3x^2 e^{\frac{1}{x}}}{(3x-2)^2} = \frac{(3x^2 - 7x + 2)e^{\frac{1}{x}}}{(3x-2)^2}$. Cette dérivée est du signe de $3x^2 - 7x + 2$, qui a pour discriminant $\Delta = 49 - 24 = 25$, et admet pour racines $x_1 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}$, et $x_2 = \frac{7+5}{6} = 2$. On calcule $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{9} \times e^3}{1 - 2} = -\frac{e^3}{9}$, et $f(2) = \frac{4\sqrt{e}}{6-2} = \sqrt{e}$. Et on ne fait pas tout de suite le tableau de variations puisqu'il est demandé à la question suivante.
3. Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, on en déduit par quotient des termes de plus haut degré que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Quand x tend vers $\frac{2}{3}$, le numérateur de la fonction a une limite finie strictement positive, tout dépend donc du signe du dénominateur, et $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^+} f(x) = +\infty$. Restent les limites en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ (pas de

forme indéterminée ici). En 0^+, on peut poser $X = \dfrac{1}{x}$ et constater que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X^2} = +\infty$ (croissance comparée classique) pour en déduire que $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, puis sans difficulté que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ (le dénominateur est négatif). On peut compléter notre tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{e^3}{9}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Calculons donc $f(x) - (ax+b) = \dfrac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - (ax+b)(3x-2)}{3x-2} = \dfrac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - 3ax^2 + (2a-3b)x + 2b}{3x-2}$. Manifestement, il y a un problème dans l'énoncé puisqu'on ne pourra jamais se debérasser de l'exponentielle. En fait, on peut simplement trouver des réels a, b et c tels que $f(x) - (ax+b)e^{\frac{1}{x}}$ soit de la forme souhaitée. Il suffit pour cela de procéder à une identification pour se débarasser des termes non constants : $1 - 3a = 0$ implique $a = \dfrac{1}{3}$, puis $2a - 3b = 0$ donne $b = \dfrac{2}{3}a = \dfrac{2}{9}$, et on en déduit que $c = 2b = \dfrac{4}{9}$. Malheureusement, tout ce qu'on peut déduire facilement de cela, c'est juste que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b)e^{\frac{1}{x}} = 0$, ce qui ne suffit pas à prouver que la droite est une asymptote oblique. En fait, la courbe admet en $\pm\infty$ une asymptote oblique commune d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{9}$, mais on ne peut pas le prouver facilement avec les outils dont on dispose pour l'instant. On indiquera quand même sur la courbe la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{9}$ comme asymptote oblique à la courbe.
5. Allons-y pour la courbe :



Exercice 5

1. La fonction f est définie lorsque $\text{ch}(x) > 0$, c'est-à-dire tout le temps : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Calculons : $f(0) = 0+2\ln(1) = 0$; $f(\ln(2)) = \ln(2)+2\ln\left(\dfrac{2+\frac{1}{2}}{2}\right) = \ln(2)+2\ln(5)-2\ln(4) = 2\ln(5)-3\ln(2)$; et $f(-\ln(3)) = -\ln(3)+2\ln\left(\dfrac{\frac{1}{3}+3}{2}\right) = -\ln(3)+2\ln(5)-2\ln(3) = 2\ln(5)-3\ln(3)$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1+2\dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = 1+\dfrac{2e^x-2e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \dfrac{3e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Cette dérivée est du signe de $3e^x - e^{-x} = e^{-x}(3e^{2x}-1)$. Elle s'nanule en particulier lorsque $e^{2x} = \dfrac{1}{3}$, soit $x = -\dfrac{1}{2}\ln(3)$ (et $f'(x)$ est négative avant, positive après). On peut s'embêter à calculer $e^{-\frac{1}{2}\ln(3)} = 3^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, et $e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = \sqrt{3}$ pour en déduire que $f\left(-\dfrac{1}{2}\ln(3)\right) = -\dfrac{1}{2}\ln(3) + 2\ln\left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln(3)+2\ln(4)-2\ln(\sqrt{3})-2\ln(2) = 2\ln(2)-\dfrac{3}{2}\ln(3) \simeq -0.25$. Voici une première version du tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	$+\infty$
f	$\searrow$	$2\ln(2)-\frac{3}{2}\ln(3)$	$\nearrow$

4. On peut écrire $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{2}$ et en déduire que $f(x) = x+2\ln\left(\dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{2}\right) = x+2x+2\ln(1+e^{-2x})-2\ln(2)$, ce qui correspond exactement à la formule de l'énoncé. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-2x}) = 0$ (pas de forme indéterminée ici), on en déduit facilement, d'une part que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et d'autre part que la droite d'équation $y = 3x-2\ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe (pusique l'écart entre $f(x)$ et cette valeur tend vers 0). La position relative est donnée par le signe de $\ln(1+e^{-2x})$. Or, e^{-2x} étant toujours positif, ce nombre est lui-même toujours positif : la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.

5. C'est extrêmement similaire : $\text{ch}(x) = \dfrac{e^{-x}(1+e^{2x})}{2}$, donc $f(x) = -x+2\ln(1+e^{2x})-2\ln(2)$. Les conclusions sont essentiellement les mêmes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; la droite d'équation $y = -x-2\ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe en $-\infty$, et la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.

6. Et une dernière courbe pour la route, une !