

TD n°2 : révisions pour le DS1

PTSI B Lycée Eiffel

21 septembre 2017

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\frac{2x+3}{x-1} \leq \frac{4x}{2x-3}$.
2. $2 \operatorname{ch}(x) + 4 \operatorname{sh}(x) = 2$.
3. $|1-x| \leq 2|x| - 3$
4. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ (il est fortement conseillé d'effectuer le changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$, pour obtenir une équation du second degré en X).

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{1 + \ln(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative de f ?
5. Calculer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f en son point d'abscisse e , puis déterminer la position relative de \mathcal{C}_f et de T .
6. Tracer une allure de \mathcal{C}_f et de T dans un même repère.

Exercice 3

On considère l'équation $\sqrt{x^2 + mx - 2} = 2x + 1$, où m est un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de x (dépendant de m), l'équation est-elle définie ?
2. Résoudre l'équation lorsque $m = -2$.
3. Résoudre l'équation $3x^2 + (4 - m)x + 3 = 0$.
4. Résoudre les inéquations $m - 1 \geq \sqrt{(m+2)(m-10)}$, puis $\sqrt{(m+2)(m-10)} \geq 1 - m$.
5. Conclure en précisant le nombre et l'expression des solutions de l'équation initiale en fonction de la valeur de m .

Exercice 4

On pose dans cet exercice $f(x) = \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{3x-2}$, et on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f , puis étudier les variations de f .
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et dresser son tableau de variations complet.
4. Déterminer trois réels a , b et c tels que $f(x) - (ax + b) = \frac{ce^{\frac{1}{x}}}{3x-2}$. En déduire que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à \mathcal{C}_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Tracer une allure soignée de la courbe \mathcal{C}_f (on précise que $e^3 \simeq 20$).

Exercice 5

On cherche dans cet exercice à étudier la fonction f définie par $f(x) = x + 2 \ln(\operatorname{ch}(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Calculer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(\ln(2))$ et $f(-\ln(3))$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f , puis dresser le tableau de variations de la fonction f (sans les limites pour l'instant).
4. En factorisant $\operatorname{ch}(x)$ par e^x , prouver que $f(x) = 3x - 2 \ln(2) + 2 \ln(1 + e^{-2x})$. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis prouver que la droite d'équation $y = 3x - 2 \ln(2)$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f quand x tend vers $+\infty$. Préciser la position relative de la courbe et de son asymptote.
5. Effectuer un calcul similaire à celui de la question précédent quand x tend vers $-\infty$, en commençant cette fois-ci par factoriser $\operatorname{ch}(x)$ par e^{-x} .
6. Tracer une allure de la courbe \mathcal{C}_f , ainsi que de ses deux asymptotes obliques.