TD n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

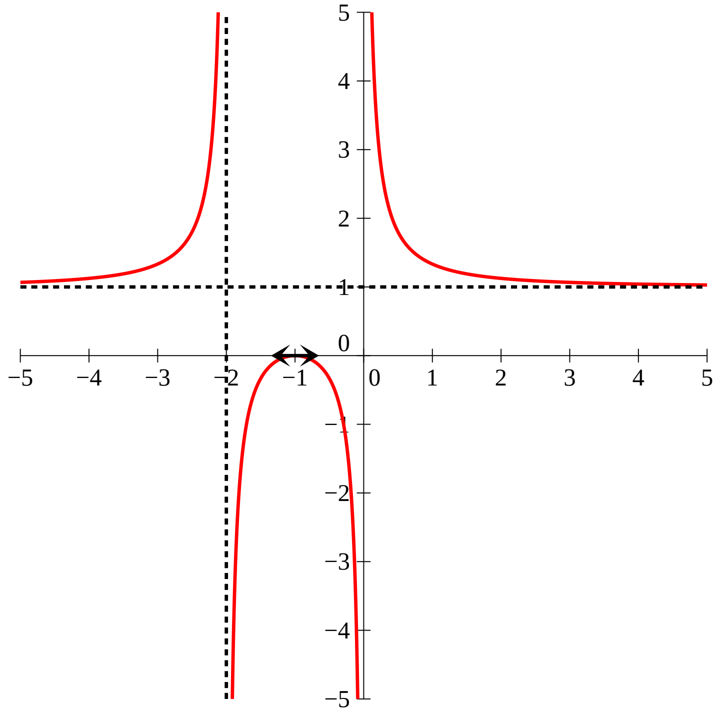
5 septembre 2017

Exercice 1

La fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2, 0\}$. Pour simplifier les calculs, on peut constater que $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x} = 1 + \dfrac{1}{x^2+2x}$. Cela permet notamment de prouver très facilement que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ (il y a donc une asymptote horizontale commune en $+\infty$ et en $-\infty$), et de calculer tout aussi facilement $f'(x) = -\dfrac{2x+2}{(x^2+2x)^2}$. Cette dérivée est du signe de $x+1$ donc négative à droite de -1 et positive à gauche de -1. On calcule en passant $f(-1) = 0$. Il ne reste plus qu'à déterminer les limites en -2 et en 0 (à gauche et à droite à chaque fois), qui sont toutes infinies puisque le numrateur y est strictement positif, et le dénominateur tend vers 0. Leur signe est donné par celui de x^2+2x, qui est positif à l'extérieur de ses racines, c'est-à-dire à gauche de -2 et à droite de 0. On peut alors dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
			$+\infty$ ‖				‖ $+\infty$		
	1	↗	‖	↗	0	↘	‖	↘	1
f			‖ $-\infty$				$-\infty$ ‖		

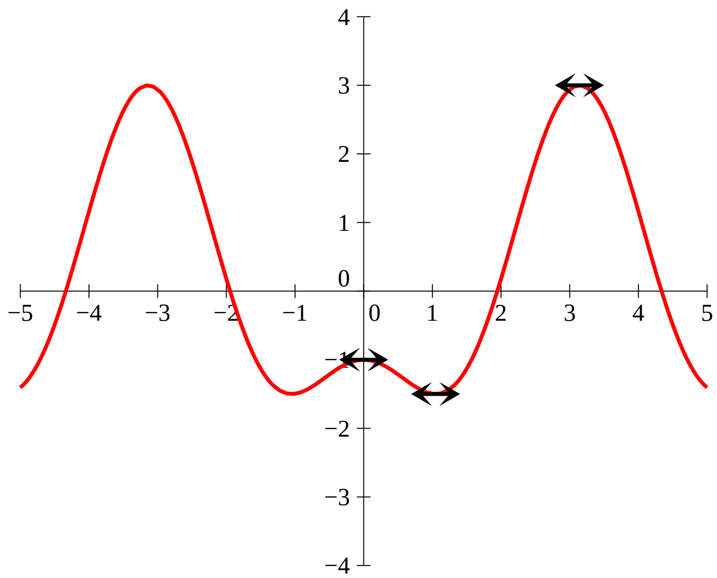
On conclut bien entendu avec un tracé de l'allure de la courbe représentative de f :



La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme pour toute fonction trigonométrique, on cherche à voir si la fonction n'est pas périodique. Elle l'est, de période 2π, puisque $h(x+2\pi) = \cos(2x+4\pi) - 2\cos(x+2\pi) = \cos(2x) - 2\cos(x)$. Elle est de plus paire, puisque la fonction cos est elle-même paire. On peut donc se contenter d'étudier h sur l'intervalle $[0;\pi]$, et de compléter la courbe ensuite (par symétrie par rapport à (Oy), puis par périodicité). Sa dérivée est donnée par $h'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2(\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)) = 2\sin(x)(1-2\cos(x))$. Sur $[0;\pi]$, le sinus est toujours positif, reste à déterminer le signe de $1-2\cos(x)$. Cette expression est positive lorsque $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui, sur l'intervalle $[0\pi]$, se produit sur $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$. La dérivée change donc de signe en $\dfrac{\pi}{3}$, qui est un minimum local de la fonction de valeur $h\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{3}{2}$. On peut également calculer $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 1 - (-2) = 3$ pour compléter le tableau de variations de h :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
h	0	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	3

En complétant par symétrie par rapport à (Oy) (il y a donc un maximum local en 0), et par périodicité, on obtient une courbe ressemblant à ceci :



Exercice 2

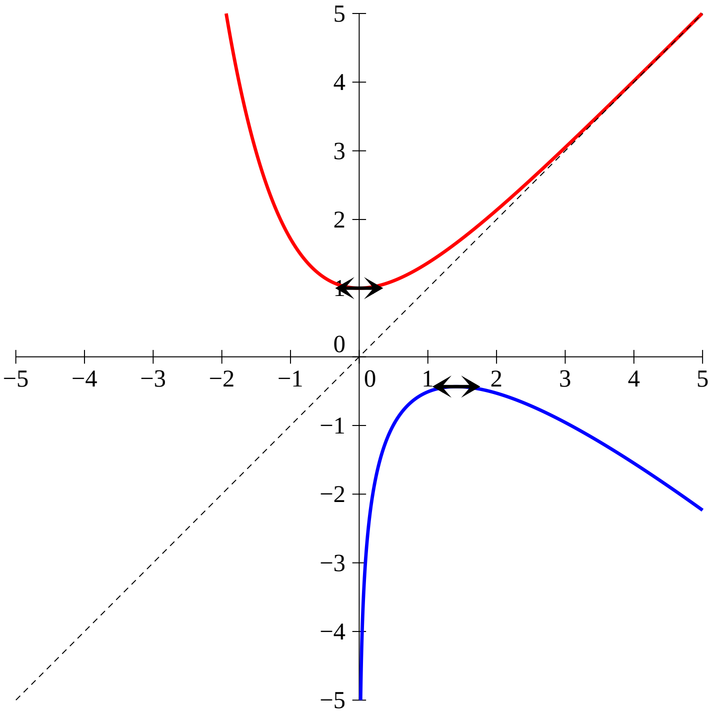
1. Puisque le sac S_1 contient un jeton blanc et deux jetons noirs, on a simplement $P(B_1) = \frac{1}{3}$. Ce qu'on aura dans le sac S_2 au moment du deuxième tirage dépend du premier tirage : si on a tiré un jeton blanc au premier tirage, on aura deux jetons blancs et un noir dans S_2, ce qui prouve que $P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3}$. Au contraire, si on n'a pas tiré de jeton blanc au premier tirage (on a donc tiré un noir), on aura un blanc et deux noirs dans S_2 donc $P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{1}{3}$. On peut alors calculer $P(B_2)$ en utilisant la formule des probabilités totales (ou, si on ne la connait pas, en faisant un arbre avec deux branches pour le premier tirage, puis deux branches à chaque fois pour le deuxième tirage selon le résultat du premier tirage) : $P(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.
2. On peut faire le même raisonnement qu'au-dessus : si on a tiré une boule blanche au tirage numéro k, alors la probabilité (conditionnelle) d'en tirer à nouveau une au tirage $k+1$ sera de $\frac{2}{3}$ (puisqu'on aura deux jetons blancs et un noir dans le sac), mais si on a tiré une boule noire au tirage numéro k, alors la probabilité conditionnelle sera de $\frac{1}{3}$. On peut créer un arbre (sauf préciser ce qui se passe avant le tirage k, on ne représente que les tirages k et $k+1$ pour avoir un arbre à quatre branches comme à la question précédente) et en déduire que $p_{k+1} = P(B_k) \times \frac{2}{3} + P(\overline{B_k}) \times \frac{1}{3}$. Or, $P(\overline{B_k}) = 1 - P(B_k)$, donc on obtient $p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k) = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.
3. Pour montrer que la suite est géométrique, on calcule simplement $u_{k+1} = p_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}p_k - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(p_k - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}u_k$. La suite (u_k) est donc bien géométrique, de raison $\frac{1}{3}$. De plus, elle est définie à partir du terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$. On en déduit que $u_k = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = -\frac{1}{2 \times 3^k}$. Il n'y a plus qu'à revenir à la définition de u_k pour obtenir $p_k = u_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^k}$.

4. La limite demandée est évidente puisque $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{3^k} = 0$. Celà signifie que, si on fait tendre le nombre de sacs vers l'infini, la probabilité de tirer un jeton blanc ou un jeton noir tend à s'équilibrer. Autrement dit, l'influence du premier sac (où on avait deux fois plus de chances de tirer un jeton noir qu'un blanc) finit par s'estomper.
5. Vu la formule obtenue pour p_k, il faut simplement avoir $\frac{1}{2 \times 3^k} \leqslant \frac{1}{1000}$, soit $3^k \geqslant 500$. Comme vous connaissez vos puissances de 3 par coeur, vous obtenez très rapidement la condition $k \geqslant 6$ (non, pas par coeur ? 3, 9, 27, 81, 243, plus que 500, ça devrait quand même aller assez vite).

Problème

Partie A : étude d'une fonction numérique

1. La limite en $+\infty$ ne pose pas de problème : puisque $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Par contre, en $-\infty$, on a une belle forme indéterminée (l'exponentielle tendant vers $+\infty$ et le x vers $-\infty$). Il est grand temps de recourir à l'argument préféré des élèves paresseux : la fameuse croissance comparée. L'exponentielle l'emporte sur le x, et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 - e^{-x}$. Cette dérivée s'annule en 0, et elle est positive quand $x > 0$ (on a alors $-x < 0$, donc $e^{-x} < 1$). La fonction est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle admet en 0 un minimum de valeur $f(0) = -1$.
3. Elle est effectivement asymptote oblique à la courbe en $+\infty$, puisqu'on a déjà signalé que $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$. La position relative est simplement donnée par le signe de e^{-x}, qui est toujours positif. La courbe $\mathcal{C}$ sera toujours située au-dessus de la droite (D).
4. Voici une allure (en rouge) :



5. Le calcul ne pose pas de problème : $\int_1^{\sqrt{2}} x + e^{-x}\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - e^{-x}\right]_1^{\sqrt{2}} = 1 - e^{-\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + e^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{e}$.

Partie B : étude d'une transformation du plan

1. On peut tricher en constatant simplement que $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, et donc que le module de ce nombre vaut 1 et son argument $-\frac{3\pi}{4}$.
2. En notant a le nombre complexe précédent, puisque $z' = az$, les propriétés du module et de l'argument assurent que $|z'| = |a| \times |z| = |z|$, et $\arg(z') = \arg(a) + \arg(z)[2\pi] = \arg(z) - \frac{3\pi}{4}[2\pi]$. Le point M' est donc situé à égale distance de l'origine que le point M mais la droite (OM') forme un angle diminué de $\frac{3\pi}{4}$ avec l'horizontale par rapport à la droite (OM), ce qui revient exactement à dire que M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.
3. Puisqu'on sait que $z' = z \times e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, on peut écrire $z = e^{i\frac{3\pi}{4}} \times z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x' + iy') = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)$. Une simple identification des parties réelle et imaginaire donne donc les relations $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$, et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$.
4. Si $M \in \mathcal{C}$, on aura $y = x + e^{-x}$, soit en reprenant les expressions obtenues à la question précédente $\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')}$, ce qui revient à dire que $\sqrt{2}x' = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')}$, soit $\ln(\sqrt{2}x') = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, ce qui donne bien $y' = -x' + \sqrt{2}\ln(x'\sqrt{2})$.

Partie C : étude d'une nouvelle fonction

1. On a bien entendu $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{+*}$.
2. Pas de problème en 0, il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty$. En $+\infty$, on est par contre obligé de recourir à un argument de type croissance comparée pour expliquer que le $-x$ va l'emporter sur le ln et ainsi obtenir $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
3. On va bien entendu dériver la fonction : $g'(x) = -1 + \sqrt{2} \times \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2} - x}{x}$. Cette dérivée est du signe de $\sqrt{2} - x$, la fonction g est donc croissante sur $]0, \sqrt{2}]$ et décroissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$. Elle admet un minimum de valeur $g(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\ln(2) = \sqrt{2}(\ln(2) - 1)$.
4. La courbe est donnée plus haut. La partie B permet de comprendre que la courbe $\mathcal{C}'$ est obtenue à partir de la courbe $\mathcal{C}$ en la faisant tourner de $-\frac{3\pi}{4}$ par rapport à $\mathcal{C}$.

Partie D : calcul d'intégrale

1. Il suffit de la dériver, et on trouve bien $\ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.
2. Il faut faire un peu attention au $\sqrt{2}$ qui traine dans le ln, ou simplement s'en débarasser en écrivant $g(x) = -x + \sqrt{2}\ln(x) + \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}) = -x + \sqrt{2}\ln(x) + \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}}$. On en déduit alors qu'une primitive de g est donnée par $G(x) = -\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x\ln(x) - \sqrt{2}x + \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}}x$. L'intégrale demandée vaut alors $G(\sqrt{2}) - G(1) = -1 + 2\ln(\sqrt{2}) - 2 + \ln(2) + \frac{1}{2} + \sqrt{2} - \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{2} + 2\ln(2) + \sqrt{2} - \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}}$ (inutile de chercher à simplifier davantage).