TD n°1 : révisions variées

PTSI B Lycée Eiffel

5 septembre 2017

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$.
Même question pour la fonction $g : x \mapsto \cos(2x) - 2\cos(x)$.

Exercice 2

Pour tout l'exercice, n est un entier naturel supposé supérieur ou égal à 2. On dispose de n sacs de jetons numérotés S_1, S_2, …, S_n. Initialement, le sac S_1 contient un jeton blanc et deux jetons noirs, et chacun des autres sacs contient un jeton blanc et un jeton noir. On effectue successivement les tirages suivants :

- On tire un jeton au hasard dans S_1 et on le place dans S_2.
- On tire un jeton au hasard dans S_2 et on le place dans S_3, etc.

Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on note B_k l'événement : « Le jeton tiré dans S_k est blanc ».

1. Calculer $P(B_1)$ puis $P(B_2)$ (on pourra calculer les probabilités conditionnelles $P_{B_1}(B_2)$ et $P_{\overline{B_1}}(B_2)$).
2. En notant $p_k = P(B_k)$, justifier la relation de récurrence $p_{k+1} = \dfrac{1}{3}p_k + \dfrac{1}{3}$ (pour les entiers k pour lesquels celà a un sens).
3. On pose $u_k = p_k - \dfrac{1}{2}$ (on suppose les deux suites définies pour tout entier $k \geqslant 1$, même si ce n'est pas très cohérent avec l'expérience précédente), montrer que la suite (u_k) est une suite géométrique, et en déduire la valeur de u_k, puis celle de p_k.
4. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} p_k = \dfrac{1}{2}$. Peut-on donner une interprétation probabiliste de ce résultat ?
5. Déterminer le plus petit entier k pour lequel $0.4999 \leqslant p_k \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Problème

Partie A : étude d'une fonction numérique

On pose $f(x) = x + e^{-x}$, et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$, et étudier la position relative de (D) et de $\mathcal{C}$.
4. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite (D) (dans le même repère).
5. Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} f(x)\, dx$.

Partie B : étude d'une transformation du plan

À tout point M d'affixe z du plan complexe, on associe un point $M' = r(M)$ d'affixe $z' = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) z$.

1. Déterminer le module et un argument de $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.
2. En déduire module et argument de z' en fonction de ceux de z. Comment fait-on géométriquement pour passer du point M au point M' ?
3. En posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, exprimer x et y en fonction de x' et y'.
4. On suppose que le point M de coordonnées (x, y) appartient à la courbe $\mathcal{C}$. Montrer que, dans ce cas, $y' = -x' + \sqrt{2}\ln(x'\sqrt{2})$.

Partie C : étude d'une nouvelle fonction

On pose désormais $g(x) = -x + \sqrt{2}\ln(x\sqrt{2})$, et on note $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de g.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction g ?
2. Étudier les limites de g aux bornes de ce domaine.
3. Étudier les variations de g.
4. Tracer une allure de $\mathcal{C}'$ dans le même repère que la courbe $\mathcal{C}$ (on pourra éventuellement utiliser les résultats de la partie B).

Partie D : calcul d'intégrale

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. En déduire une primitive de la fonction g, puis calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} g(x)\, dx$.