Interrogation Écrite n$^{\text{o}}$ 8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 mai 2018

1. C'est dans le cours !
2. Dans une urne se trouvent trois boules vertes, trois boules rouges et quatre boules bleus. On tire trois boules successivement avec remise.
   (a) Les tirages étant successifs sans remise, on va utiliser des listes. Comme il y a 10 boules au total dans l'urne, on aura donc $|\Omega| = 10^3 = 1\ 000$.
   (b) Si on veut être très rigoureux, note A l'événement « On a tiré trois boules de la même couleur », avec A_1 la possibilité « On a tiré trois boules vertes », A_2 pour trois boules rouges et A_3 pour trois boules bleues. Les événements A_1, A_2 et A_3 sont incompatibles, de réunion A, donc $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \dfrac{3^3 + 3^3 + 4^3}{10^3} = \dfrac{118}{1\ 000} = \dfrac{59}{500}$.
   (c) Il y a pour chaque tirage une probabilité $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ de ne pas tirer de boule bleue, donc la probabolité demandée vaut $\dfrac{3^3}{5^3} = \dfrac{27}{125}$.
   (d) Il faut choisir la boule verte tirée (trois possibilités), choisir la boule rouge, choisir la boule bleue, mais aussi choisir l'ordre dans lequel on va tirer les trois couleurs ($3! = 6$ possibilités), ce qui donne une probabilité égale à $\dfrac{3 \times 3 \times 4 \times 6}{10^3} = \dfrac{3^3}{5^3} = \dfrac{27}{125}$ (la même que tout à l'heure donc, mais c'est une coïncidence ici).
   (e) Sur les 1 000 tirages possibbles au total, il y en a 10 pour lesquels on a tiré trois fois la même boule (il faut quand même choisir la boule !), soit une probabilité de $\dfrac{1}{100}$. Alternativement, on fait le premier tirage, puis on considère que, pour chacun des deux tirages suivants, on a une probabilité $\dfrac{1}{10}$ de tirer à nouveau la boule tirée lors du premier tirage.
3. (a) Pour simplifier le raisonnement, notons F_n l'événement « Notre cobaye a fumé au jour numéro n » et G_n l'événement « Notre cobaye n'a pas fumé au jour n ». Les données de l'énoncé peuvent se traduire ainsi : $P(F_0) = 1$ (ce qu'on notera $u_0 = 1$ puisque l'énoncé nous impose la notation $u_n = P(F_n)$), et on connait toutes les probabilités conditionnelles $P_{F_n}(F_{n+1}) = \dfrac{1}{10}$; $P_{F_n}(G_{n+1}) = \dfrac{9}{10}$; $P_{G_n}(F_{n+1}) = \dfrac{7}{10}$ et $P_{G_n}(G_{n+1}) = \dfrac{3}{10}$. Les événements F_n et G_n formant manifestement un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(F_{n+1}) = P(F_n) \times P_{F_n}(F_{n+1}) + P(G_n) \times P_{G_n}(F_{n+1}) = \dfrac{1}{10}P(F_n) + \dfrac{7}{10}P(G_n)$. Comme G_n et F_n sont complémentaires, on a $P(G_n) = 1 - P(F_n) = 1 - u_n$, et donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n + \dfrac{7}{10}(1 - u_n) = \dfrac{7}{10} - \dfrac{3}{5}u_n$. La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \dfrac{7}{10} - \dfrac{3}{5}x$, qui admet comme solution $x = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{7}{16}$. Posons donc $v_n = u_n - \dfrac{7}{16}$, et calculons $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{7}{16} = \dfrac{7}{10} - \dfrac{3}{5}u_n - \dfrac{7}{16} = \dfrac{21}{80} - \dfrac{3}{5}u_n = -\dfrac{3}{5}\left(u_n - \dfrac{7}{16}\right) = -\dfrac{3}{5}u_n$. La suite

(v_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \dfrac{7}{16} = \dfrac{9}{16}$. On en déduit que $v_n = \dfrac{9}{16} \times \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$, puis que $u_n = \dfrac{7}{16} + \dfrac{9}{16} \times \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$.

(b) Sans difficulté, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{7}{16}$. Notre cobaye continuera donc à fumer en moyenne presque un jour sur deux (en fait, le modèle utilisé est assez stupide).

4. (a) Notons $A_{k,r}$ l'événement : « On n'a tiré que des boules blanches dans après r tirages dans l'urne k », et A_r l'événement « On n'a tiré que des boules blanches lors des r premiers tirages » (indépendamment de l'urne choisie). L'événement A_r est clairement union disjointe des événements $A_{k,r}$, et l'événement $A_{k,r}$ a une probabilité $\dfrac{1}{n+1} \times \left(\dfrac{k}{n}\right)^r$ (on choisit l'urne k avec probabilité $\dfrac{1}{n+1}$ puis on a une proba $\dfrac{k}{n}$ de tirer une boule blanche à chacun des r tirages qui s'effectuent sans remise). On en déduit que $P(A_r) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^r$ (on peut oublier le terme correspondant à $k = 0$ qui est nul). Puisque l'événement A_{r+1} est inclus dans A_r, ce qu'on nous demande de calculer peut s'écrire comme $P_{A_r}(A_{r+1}) = \dfrac{P(A_r \cap A_{r+1})}{P(A_r)} = \dfrac{P(A_{r+1})}{P(A_r)}$, soit au vu du calcul précédent une probabilité égale à $\frac{\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{r+1}}{\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{r}} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{r+1}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^r}$. Par exemple, lorsque $r = 1$, on obtient grâce à nos connaissances sur les sommes classiques une probabilité égale à $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)} = \dfrac{2n+1}{3n}$, qui a une limite égale à $\dfrac{2}{3}$ quand n tend vers $+\infty$. De même, lorsque $r = 2$, la probabilité vaut $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{6n^2(n+1)^2}{4n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{3(n+1)}{2(2n+1)}$, qui a cette fois-ci une limite de $\dfrac{3}{4}$. On ne sait pas calculer les sommes explicitement lorsque $r \geq 3$.

(b) Revenons à la formule obtenue avant simplification pour $P(A_r)$: $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^r$. Au détail près qu'il y a un facteur $n+1$ au lieu de n au dénominateur (ce qui ne changera pas la limite puisque $\dfrac{n}{n+1}$ tend vers 1), on reconnait exactement une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto x^r$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Lorsque n tend vers $+\infty$, l'événement A_r a donc une probabilité qui tend vers $\displaystyle\int_0^1 x^r\, dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_0^1 = \frac{1}{r+1}$. Notre probabilité a donc pour limite $\frac{\frac{1}{r+2}}{\frac{1}{r+1}} = \dfrac{r+1}{r+2}$, ce qui est tout à fait cohérent avec les calculs effectués lorsque $r = 1$ et $r = 2$.