

Interrogation Écrite n° 7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

27 mars 2018

1. On essaye de « résoudre » le système en exprimant deux inconnues en fonction des deux autres (on ne peut pas espérer mieux), par exemple $t = x + y - z$, puis en remplaçant dans la deuxième équation $2x - y + 2z = 0$, donc $y = 2x + 2z$. On peut alors écrire $t = 3x + z$, et donc $G = \{(x, 2x + 2z, z, 3x + z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 2, 0, 3); (0, 2, 1, 1))$. Les deux vecteurs de la famille génératrice obtenue étant non colinéaires, c'est une base de G , qui est donc de dimension 2 (on peut naturellement obtenir d'autres bases tout aussi convenables, par exemple en gardant d'autres inconnues lors de la résolution du système).

2. Le plus rapide est de constater que $u_1 - u_2 = u_3$, ce qui suffit à prouver que la famille n'est pas libre. On peut aussi revenir à la définition et chercher les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0. \text{ On est alors ramené à résoudre le système } \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a + 2c = 0 \\ a + 3b - 2c = 0 \end{cases}.$$

La deuxième équation donne $c = -a$, puis en remplaçant dans la première $-a - b = 0$, donc $b = -a$. On remplace tout dans la dernière et on obtient $a - 3a + 2a = 0$, équation qui est toujours vérifiée. Tous les triplets de la forme $(a, -a, -a)$ sont donc solutions du système, ce qui prouve que la famille n'est pas libre. En particulier, quand $a = 1$, on retrouve $b = c = -1$, ce qui prouve que $u_1 - u_2 - u_3 = 0$. Dans la mesure où une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (qui est un espace vectoriel de dimension 3) est libre (et est une base) si et seulement si elle est génératrice, la famille ne peut pas non plus être génératrice (et là, pour le coup, je ne referai pas le calcul complètement inutile à partir de la définition).

3. Il s'agit d'une famille de trois polynômes dans un espace vectoriel qui est de dimension 3, il suffit donc de prouver qu'elle est libre pour qu'il s'agisse d'une base. Supposons donc $0 = aP_1 + bP_2 + cP_3 = \frac{a}{2}(X^2 - 3X + 2) - b(X^2 - 2X) + \frac{c}{2}(X^2 - X) = \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)X^2 + \left(2b - 3\frac{a}{2} - \frac{c}{2}\right)X + a$. Le polynôme est nul si chacun de ses trois coefficients est nul, on a immédiatement $a = 0$, donc $-b + \frac{1}{2}c = 2b - \frac{c}{2} = 0$, ce qui ne peut être vérifié que si $b = c = 0$, donc la famille est bien libre.

Pour obtenir les coordonnées de Q , on résout le même système mais avec des réels égaux à 1, -3 et 1 dans le second membre. La dernière équation donne donc immédiatement $a = 1$, et en remplaçant dans les deux autres on a $-b + \frac{c}{2} = \frac{1}{2}$ et $2b - \frac{c}{2} = -\frac{3}{2}$. L'addition des deux donne $b = -1$, dont on déduit que $c = 1 + 2b = -1$. Autrement dit, Q a pour coordonnées $(1, -1, -1)$ dans notre base.

4. La suite nulle est une suite arithmétique, une somme de deux suites arithmétiques (de premier terme u_0 et raison r pour la première, premier terme v_0 et raison r' pour la seconde) est bien arithmétique (de premier terme $u_0 + v_0$ et de raison $r + r'$), et multiplier une suite arithmétique par une constante revient à multiplier sa raison et son premier terme par la même constante. Le sous-ensemble F est donc bien un sous-espace vectoriel de E . De plus, on sait que toute suite arithmétique a un terme général qui peut s'écrire sous la forme $u_n = u_0 + nr$, ce qui revient à dire, en posant (v_n) la suite constante égale à 1 et w_n la suite définie par $w_n = n$, que $u_n = u_0 \times v_n + r \times w_n$ pour tout entier naturel n . Autrement dit, les suites arithmétiques sont exactement les combinaisons linéaires des deux suites (v_n) et (w_n) , et $F = \text{Vect}((v_n), (w_n))$.

est un espace vectoriel de dimension 2 (les deux suites n'étant pas proportionnelles). C'est logique dans la mesure où une suite arithmétique est définie de façon unique par deux réels indépendants : son premier terme et sa raison.

5. (a) Un peu de trigonométrie pour commencer : on sait bien que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ pour tout réel x , donc $f_2 = 2g_2 - g_0$. De même, la formule de triplification $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ implique que $f_3 = 4g_3 - 3g_1$. Comme par ailleurs $f_1 = g_1$ et $f_0 = g_0$, toute combinaison linéaire des quatre fonctions engendrant F_3 peut s'écrire $af_0 + bf_1 + cf_2 + df_3 = (a - c)g_0 + (b - 3d)g_1 + 2cg_2 + 4dg_3$, et appartient donc à G_3 , ce qui prouve que $F_3 \subset G_3$.
- (b) Supposons donc que $a + b\cos(x) + c\cos^2(x) + d\cos^3(x) = 0$. La méthode astucieuse consiste à dire que cette égalité est vérifiée pour tout réel de la forme $x = \arccos(t)$ lorsque $t \in [-1, 1]$, ce qui prouve que le polynôme $a + bt + ct^2 + dt^3$ s'annule une infinité de fois (sur tout l'intervalle $[-1, 1]$, donc), ce qui suffit à assurer que $a = b = c = d = 0$. Sinon, on utilise des méthodes plus classiques : pour $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve tout de suite $a = 0$. Pour $x = 0$ on a alors $b + c + d = 0$, et pour $x = \pi$, $-b + c - d = 0$, ce qui en additionnant donne $c = 0$ et donc $d = -b$. Reste à prendre par exemple $x = \frac{\pi}{3}$ pour trouver $\frac{1}{2}b + \frac{1}{8}d$, ce qui est incompatible avec la relation précédente sauf si $b = d = 0$. Les deux méthodes permettent de conclure que la famille (g_0, g_1, g_2, g_3) est libre, et donc que l'espace G_3 qu'elles engendrent est de dimension 4.
- (c) On peut prouver que F_3 est aussi de dimension 4 par une méthode similaire à celle de la question précédent et en déduire que $G_3 = F_3$ (l'un est inclus dans l'autre et ils ont la même dimension) mais il est beaucoup plus rapide de prouver l'inclusion réciproque $G_3 \subset F_3$. En effet, $g_2 = \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_0$, et $g_3 = \frac{1}{4}f_3 + \frac{3}{4}f_1$, et on conclut comme à la première question.