NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n° 7

PTSI B Lycée Eiffel

27 mars 2018

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on note $G = \{(x, y, z, t) \mid x + y - z - t = x - 2y + 3z + t = 0\}$. Donner une base et la dimension de G.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 3)$ et $u_3 = (2, 2, -2)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

3. On pose $P_0 = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1)$. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puis déterminer les coordonnées du polynômes $Q = X^2 - 3X + 1$ dans cette base.

4. On se place dans l'espace vectoriel E de toutes les suites réelles, et on note F le sous-ensemble de E constitué de toutes les suites arithmétiques (quelle que soit leur raison). Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E, puis donner la dimension et une base de F.

5. Pour tout entier naturel n, on note $f_n(x) = \cos(nx)$ et $g_n(x) = \cos^n(x)$. On définit par ailleurs $F_n = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$ et $G_n = \mathrm{Vect}(g_0, g_1, \dots, g_n)$, qui sont donc des sous-espaces vectoriels de l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $f_2 \in G_3$ et que $f_3 \in G_3$. En déduire rigoureusement que $F_3 \subset G_3$.
   (b) Quelle est la dimension de G_3 (à justifier rigoureusement) ?
   (c) Montrer que $F_3 = G_3$.