Interrogation Écrite n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 janvier 2018

Questions indépendantes.

1. C'est évidemment dans le cours, la démonstration combinatoire était acceptée même si beaucoup ont préféré le calcul.
2. On applique la formule du binôme de Newton : $(2x-3)^5 = 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1\ 080x^2 + 810x - 243$.
3. Si les pions sont distinguables, il s'agit de choisir quatre cases sur le plateau, avec un ordre important mais des répétitions interdites, il y a donc $\dfrac{16!}{12!} = 16 \times 15 \times 14 \times 13$ possibilités. Si les pions sont indistinguables, l'ordre n'est plus important, il suffit de choisir les quatre cases, il y a $\dbinom{16}{4}$ possibilités.

Exercice.

1. Avec deux boutons, les combinaisons possibles sont (1)(2), (2)(1) et (12), soit $a_2 = 3$. Avec trois boutons, on a une possibilité à une étape (123), six possibilités à trois étapes (1)(2)(3), (1)(3)(2), (2)(1)(3), (2)(3)(1), (3)(1)(2) et (3)(2)(1), et enfin six possiblités à deux étapes (1)(23), (2)(13), (3)(12), (23)(1), (13)(2), (12)(3), soit $a_3 = 13$.
2. Il suffit de choisir l'ordre dans lequel on va appuyer sur les boutons, ce qui peut se faire de $n!$ façons.
3. Si $n = 4$, il y a six possibilités où on appuye sur deux boutons à la première étape (il faut choisir les deux boutons de la première étape), quatre où on appuye sur un seul bouton à la première étape, et quatre où on appuye sur trois boutons à la première étape. Soit 14 possibilités au total, qu'on peut donc obtenir en calculant $\dbinom{4}{1} + \dbinom{4}{2} + \dbinom{4}{3}$. De même lorsque $n = 5$, on peut appuyer sur un bouton à la première étape (cinq possibilités), deux boutons (dix possibilités), trois boutons (encore dix possibilités) ou quatre (cinq possibilités), soit $\dbinom{5}{1} + \dbinom{5}{2} + \dbinom{5}{3} + \dbinom{5}{4} = 30$ possibilités. De façon générale, on aura toujours $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 2$ possibilités. Une autre façon de voir les choses : on choisit un sous-ensemble de l'ensemble des boutons pour la première étape, en interdisant le sous-ensemble vide et le sous-ensemble de tous les boutons.
4. Il faut choisir les boutons de la première étape, ce qui peut se faire de $\dbinom{n}{k}$ façons, puis effectuer une combinaison des $n-k$ boutons restants, ce qui se fait de a_{n-k} façons (c'est cohérent également si on prend les n boutons pour la première étape, il n'y a plus rien à faire, on va multiplier par $a_0 = 1$), soit $\dbinom{n}{k} a_{n-k}$ choix possibles (les deux étapes étant indépendantes). Il ne reste plus qu'à additionner toutes ces possibilités pour les valeurs de k variant entre 1 (le nombre minimal de boutons appuyés à la première étape) et n. Via le

changement d'indice $i = n - k$, on trouve alors $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{n-i} a_i$, ce qui est bien la formule demandée puisque $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ (symétrie des coefficients binômiaux).

5. On applique bêtement : $a_4 = \sum_{k=0}^{3} \binom{4}{k} a_k = a_0 + 4a_1 + 6a_2 + 4a_3 = 1 + 4 + 18 + 52 = 75$ (c'est le résultat de l'exercice 8 de la feuille de dénombrement). De même, $a_5 = \sum_{k=0}^{4} \binom{5}{k} a_k = 1 + 5 + 30 + 130 + 375 = 541$ (qui correspond donc au nombre de façons de classer cinq personnes en autorisant les ex-aequo).
6. Il faut choisir les deux nombres de la première étape (parmi les n possibles), puis deux nouveaux nombres parmi les $n-2$ restants, etc, ce qui donne $\binom{n}{2} \times \binom{n-2}{2} \times \binom{n-4}{2} \times \cdots \times \binom{4}{2}$ possibilités. En écrivant tout brutalement avec des factorielles, $b_n = \frac{n!}{2(n-2)!} \times \frac{(n-2)!}{2(n-4)!} \times \cdots \times \frac{4!}{2.2} = \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}}}$ en simplifiant les factorielles (il y a bien $\frac{n}{2}$ coefficients binômiaux dans la formule initiale, ce qui explique la puissance du dénominateur). En particulier $b_8 = \frac{8!}{2^4} = \frac{5\ 040}{16} = 2\ 520$.