NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°5

PTSI B Lycée Eiffel

23 janvier 2018

Questions indépendantes.

1. Rappeler l'énoncé et une démonstration de la formule de Pascal.
2. Développer $(2x-3)^5$.
3. Un plateau de jeu est constitué de quatre lignes et quatre colonnes, donc 16 cases au total. De combien de façons différentes peut-on disposer quatre pions sur ce plateau si les pions sont de couleurs différentes ? Et s'ils sont de la même couleur (et donc indistinguables) ? On suppose qu'on n'a pas le droit de poser deux pions sur une même case.

Exercice.

Une serrure de coffre-fort possède n boutons numérotés de 1 à n. Pour ouvrir le coffre, il faut effectuer une **combinaison**, ce qui consiste à appuyer dans un certain ordre sur tous les boutons (une seule fois pour chaque bouton), sachant qu'on peut appuyer sur certains boutons simultanément. Ainsi, si $n=5$, une combinaison possible est : (13), (245), ce qui signifie qu'on a d'abord appuyé simultanément sur les boutons 1 et 3, puis simultanément sur les trois boutons restants. Cette combinaison est donc constituée de deux **étapes**. On notera a_n le nombre total de combinaisons d'un coffre à n boutons.

1. Préciser la valeur de a_2 et celle de a_3 (en faisant la liste de toutes les combinaisons possibles).
2. Pour un n quelconque, combien y a-t-il de combinaisons du coffre pour lesquelles on a effectué n étapes (autrement dit, on n'a jamais appuyé sur plusieurs boutons simultanément) ?
3. Combien y a-t-il de combinaisons constituées de deux étapes si $n=4$? Si $n=5$? Si n est quelconque ?
4. Si $k \leq n$, combien y a-t-il de combinaisons dont la première étape consiste à appuyer sur k boutons simultanément ? En déduire la formule $a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$, puis prouver que $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k$ (on convient que $a_0 = 1$).
5. À l'aide de cette dernière formule, calculer a_4 puis a_5.
6. On note b_n le nombre de combinaisons pour lesquelles on appuye sur exactement deux boutons à chaque étape (ce qui suppose bien entendu que n est un entier pair). Calculer et simplifier b_n. Donner en particulier la valeur explicite de b_8.