Interrogation Écrite n°4

PTSI B Lycée Eiffel

12 décembre 2017

1. On pose brillamment $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, puis on calcule $AM = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ z-x & t-y \end{pmatrix}$, et $MA = \begin{pmatrix} x-y & 2x+y \\ z-t & 2z+t \end{pmatrix}$. La matrice M commute donc avec A si ses coefficients sont solutions du système $\begin{cases} x + 2z = x - y \\ y + 2t = 2x + y \\ z - x = z - t \\ t - y = 2z + t \end{cases}$. Ces quatre équations se ramènent complètement trivialement aux deux conditions $y = -2z$ et $t = x$. Si on garde par exemple les deux variables x et z, on obtient donc $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -2z \\ z & x \end{pmatrix} \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

2. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 4x - 4 = 0$. Cette équation ademt pour discriminant $\Delta = 16+16 = 32$, et pour racines $r_1 = \dfrac{4+4\sqrt{2}}{2} = 2+2\sqrt{2}$, et $r_2 = \dfrac{4-4\sqrt{2}}{2} = 2-2\sqrt{2}$. On en déduit que $u_n = A(2+2\sqrt{2})^n + B(2-2\sqrt{2})^n$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer. Les conditions initiales imposent $u_0 = A + B = 1$ et $u_1 = (2+2\sqrt{2})A + (2-2\sqrt{2})B = 3$, donc $(2+2\sqrt{2})A + (2-2\sqrt{2})(1-A) = 3$, soit $4\sqrt{2}A = 3-(2-2\sqrt{2}) = 1+2\sqrt{2}$, donc $A = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}+\dfrac{1}{2}$. On en déduit que $B = 1-A = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$, puis que $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}+\dfrac{1}{2}\right)(2+2\sqrt{2})^n + \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)(2-2\sqrt{2})^n$.

3. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. On en déduit que $A^3 - A = 4I$, ce qui suffit en effet à répondre à la question suivante : en divisant par 4 et en factorisant par A, on a $A\left(\dfrac{1}{4}A^2 - \dfrac{1}{4}I\right) = I$, donc $B = \dfrac{1}{4}A^2 - \dfrac{1}{4}I$, soit $B = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. On va donc vérifier les trois points habituels :
   - $u_n - v_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} = \dfrac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = -\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
   - $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$ par la même quantité conjuguée que ci-dessus. Or, $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$, donc $\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \leq \dfrac{2}{2\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, ce qui prouve que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc que la suite (u_n) est croissante.

- C'est la même chose : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, et comme $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq 2\sqrt{n+1}$, on en déduit que $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et que la suite (v_n) est donc décroissante.

Conclusion : les deux suites sont adjacentes et convergent vers une même limite finie l.