Interrogation Écrite n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

7 novembre 2017

1. Intégration directe : $I_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x}}\ dx = \int_1^2 x^{-\frac{3}{2}}\ dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$.
2. Posons donc $t = \sqrt[3]{x}$ (on peut, la fonction racine cubique est bien définie et bijective sur l'intervalle $[1, 2]$), ce qui change les bornes de l'intégrale en 1 et $\sqrt[3]{8} = 2$, et l'élément différentiel en $dx = 3t^2\ dt$, on a donc $I_2 = \int_1^2 \frac{3t^2}{t^3(1+t)}\ dt = 3\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\ dt$. Pour éviter une décompostion en éléments simples, on peut constater que $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{(t+1)-t}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$, et on en déduit que $I_2 = 3[\ln(t) - \ln(t+1)]_1^2 = 3(\ln(2) - \ln(3) + \ln(2)) = 6\ln(2) - 3\ln(3)$.
3. On va effectuer une IPP en posant $u(x) = \ln(x)$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$, et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$, donc $v(x) = -\frac{1}{x}$ (toutes ces fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}_1$ sur l'intervalle d'intégration). On en déduit que $I_3 = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\ dx = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$.
4. On reconnait une dérivée de composée pour intégrer directement : $I_4 = [\arcsin(\ln(x))]_{\sqrt{e}}^e = \arcsin(1) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.
5. Posons donc $t = \cos(x)$, les bornes deviennent $\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, et comme $dt = -\sin(x)\ dx$, on peut directement modifier $\frac{\sin^3(x)}{\cos(x)}\ dx = -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \times (-\sin(x)\ dx) = -\frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)} \times (-\sin(x)\ dx) = -\frac{1-t^2}{t}\ dt$. Commes les bornes vont se retrouver « dans le mauvais sens », on peut changer les signes, et $I_5 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-t^2}{t}\ dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t} - t\ dt = \left[\ln(t) - \frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \ln(2) - \frac{3}{8}$.
6. Le dénominateur ayant un discriminant négatif, on met sous forme canonique pour faire apparaitre une arctangente : $I_6 = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2+1}\ dx = [\arctan(x-2)]_1^2 = \arctan(0) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4}$.
7. Cette fois-ci le dénominateur se factorise sous la forme $(x-1)(x-3)$ (1 est racine évidente), on va effectuer une décomposition en éléments simples pour écrire $\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$. En multipliant par $x-1$ puis en prenant $x = 1$ on trouve $a = -\frac{1}{2}$; en multipliant par $x-3$ avant de poser $x = 3$ on trouve $b = \frac{1}{2}$. On a donc $I_7 = \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\ dx = \frac{1}{2}[\ln(3-x) - \ln(x-1)]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = -\ln(3)$.