Interrogation Écrite n°2 : corrigé

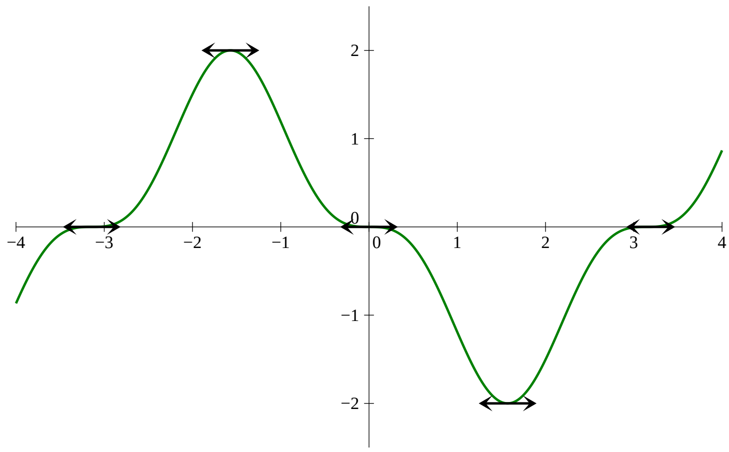
PTSI B Lycée Eiffel

3 octobre 2017

1. Voir le cours (comme pour la question bonus).
2. On pose bien entendu $X = \sin(x)$ pour se ramener à l'inéquation du second degré $2X^2 - 3X - 2 \geq 0$. Le membre de gauche a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, et admet comme racines $X_1 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{3+5}{4} = 2$. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines, c'est-à-dire ici lorsque $\sin(x) \leq -\dfrac{1}{2}$ (on ne peut pas avoir $\sin(x) \geq 2$), ce qui correspondant aux valeurs appartenant à $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right] [2\pi]$ (en acceptant cette notation déjà vue en cours).
3. Le plus rapide est de partir du fait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et d'élever le tout au carré pour obtenir $\cos^4(x) + 2\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) = 1$, soit $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1 - \dfrac{1}{2} \times (2\cos(x)\sin(x))^2 = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2(2x)$ en exploitant la formule de duplication du sinus.
4. La fonction f est bien sûr définie sur $\mathbb{R}$, et elle est impaire (le produit de gauche étant impair comme produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire) et 2π-périodique. On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$. On peut remarquer pour simplifier l'étude (en écrivant la formule de duplication du sinus) que $f(x) = 2\cos^2(x)\sin(x) - 2\sin(x) = 2(1 - \sin^2(x))\sin(x) - 2\sin(x) = -2\sin^3(x)$. Mais comme c'est un peu facile, on va calculer la dérivée normalement : $f'(x) = -\sin(x)\sin(2x) + 2\cos(x)\cos(2x) - 2\cos(x) = -2\sin^2(x)\cos(x) + 2\cos(x)(\cos(2x) - 1)$. Or, on sait que $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, donc $f'(x) = -2\sin^2(x)\cos(x) + 2\cos(x) \times (-2\sin^2(x)) = -6\sin^2(x)\cos(x)$, qui est simplement du signe de $\cos(x)$, avec tout de même en plus une annulation en 0 et en π (sur notre intervalle d'étude). Comme $f(0) = f(\pi) = 0$ (les sinus s'annulent) et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2$, on a le tableau de variations suivant sur une période (obtenu sur $[-\pi, 0]$ en exploitant la symétrie due à l'imparité de la fonction) :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	+	0	−	0	−	0	+	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Et la petite courbe qui va avec :



2
1
0
−1
−2
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4