Interrogation Écrite n°1

PTSI B Lycée Eiffel

15 septembre 2017

1. Je ne suis pas capable de résoudre des équations du troisième dégré, j'ai donc moins de 80 de QI.
2. On pose $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 - 2X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet deux solutions réelles $X_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ et $\dfrac{2-4}{2} = -1$. On ne peut pas avoir $e^x = -1$, la seule possibilité est donc $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$. Finalement, $\mathcal{S} = \{\ln(3)\}$.
3. L'inéquation ne peut avoir de sens que si $x \neq 2$ et $x \neq -2$. Elle est équivalente à $\dfrac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 4} \leq 0$. Le numérateur admet 2 pour racine évidente (en effet, $2^3 - 2 \times 2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$), on peut donc écrire $x^3 - 2x - 4 = (x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$. Par identification, on obtient $a = 1$, puis $b - 2a = 0$, donc $b = 2$, et $c - 2b = -2$ qui donne $c = 2$ (la dernière condition est alors bien vérifiée). Autrement dit, $x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$, le deuxième facteur étant toujours positif (il a un discriminant égal à -4). Même pas besoin de faire un tableau de signe, notre quotient est du signe de $\dfrac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x^2+2x+2}{x+2}$ (du moins quand $x \neq 2$). Le numérateur restant étant toujours positif, il faut que le dénominateur soit négatif, d'où $\mathcal{S} =]-\infty, -2[$.
4. On peut déjà faire passer $|3x - 1|$ à droite de l'inégalité, puis faire un « tableau de signes » pour les valeurs absolues. L'expression $3x - 1$ s'annule quand $x = \dfrac{1}{3}$, et $x^2 - x - 2$ s'annule pour $x = -1$ et $x = 2$ (racines évidentes, mais on peut bien sûr calculer un discriminant pour les retrouver), d'où le tableau suivant (je note A le second membre entier $|x^2 - x - 2| + 2 - |3x - 1|$:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$\lvert x^2-x-2\rvert$	x^2-x-2	0 $-x^2+x+2$	$-x^2+x+2$	0 x^2-x-2	
$\lvert 3x-1\rvert$	$1-3x$	$1-3x$	0 $3x-1$	$3x-1$	
A	x^2+2x-1	$-x^2+4x+3$	$-x^2-2x+5$	x^2-4x+1	

On peut désormais résoudre sur chacun des intervalles, on a une inéquation du second degré à chaque fois :

- sur $]-\infty, -1]$, on a un discriminant égal à $4 + 4 = 8$ et deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 - \sqrt{2}$. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines dont on conserve un premier intervalle $]-\infty, -1-\sqrt{2}[$ (puisque bien entendu $-1 - \sqrt{2} < -1 < -1 + \sqrt{2}$).
- sur $\left[-1, \dfrac{1}{3}\right]$, on calcule $\Delta = 16 + 12 = 28$, il y a deux racines $x_3 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{7}}{-2} = 2 + \sqrt{7}$ et $x_4 = 2 - \sqrt{7}$. Cette fois-ci le trinôme est positif entre ses racines, et $-1 < 2 - \sqrt{7} <$

$\frac{1}{3} < 2+\sqrt{7}$, donc on conserve l'intervalle $\left]2-\sqrt{7}, \frac{1}{3}\right]$ (aucune raison de ne pas inclure la valeur $\frac{1}{3}$, qui n'est pas une valeur d'annulation de notre trinôme).

- sur $\left[\frac{1}{3}, 2\right]$, on a $\Delta = 4+20 = 24$, et à nouveau deux racines (non, non, on ne vous permettra pas de faire les flemmards en donnant des discriminants négatifs) $x_5 = \frac{2+2\sqrt{6}}{-2} = -1-\sqrt{6}$ et $x_6 = -1-\sqrt{6}$. À nouveau, le trinôme est positif entre ses racines, et $-1-\sqrt{6} < \frac{1}{3} < -1+\sqrt{6} < 2$, donc on conserve l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, -1+\sqrt{6}\right[$.
- Enfin, sur $[2, +\infty[$, on a $\Delta = 16-4 = 12$, et encore deux racines $x_7 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$ et $x_8 = 2-\sqrt{3}$. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines, on conserve un dernier intervalle : $]2+\sqrt{3}, +\infty[$.

Il ne reste plus qu'à conclure (le deuxième et le troisième intervalle pouvant être réunis) : $\mathcal{S} =]-\infty, -1-\sqrt{2}[\cup]2-\sqrt{7}, -1+\sqrt{6}[\cup]2+\sqrt{3}, +\infty[$.