Devoir Commun

PTSI Lycée Eiffel

6 février 2018

Exercice 1

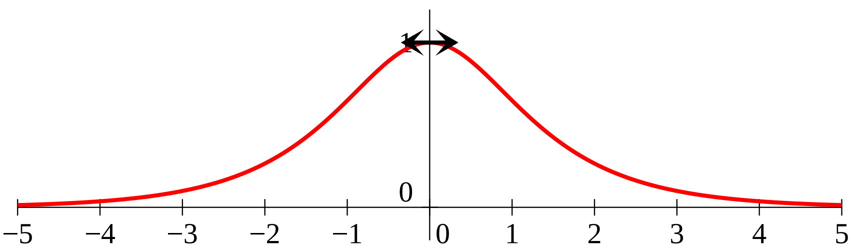
1. La fonction ch ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$, on peut normaliser l'équation pour la résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' + \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = 0$. La fonction $\dfrac{\text{sh}}{\text{ch}}$ étant de la forme $\dfrac{u'}{u}$, avec $u(x) = \text{ch}(x)$, elle admet pour primitive la fonction $x \mapsto \ln(\text{ch}(x))$. L'équation différentielle proposée (sans la condition initiale) admet donc pour solutions toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ke^{-\ln(\text{ch}(x))} = \dfrac{K}{\text{ch}(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$ (la fonction ch étant toujours strictement positive, pas besoin de valeur absolue dans le logarithme). Si on impose de plus $y(0) = 1$, comme on a $\text{ch}(x) = 1$, celà impose $K = 1$, et donc $y(x) = \dfrac{1}{\text{ch}(x)}$, qui est l'unique solution au problème posé.

2. (a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, comme on l'a déjà précisé à la première question. De plus, ch est une fonction paire, donc f également. On sait que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \text{ch}(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (on peut également ne calculer qu'une des deux limites et exploiter la parité).

   (b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = -\dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)}$. Cette dérivée est du signe de $-\text{sh}(x)$, donc positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$ (encore une fois on peut aussi exploiter la parité). On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   (c) À part la tangente horizontale au point d'abscisse 0, pas grand chose à indiquer :



3. On cherche donc à calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\text{ch}(x)}\, dx$. En posant comme le suggère gentiment l'énoncé $t = e^x$, on aura donc $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{t + \frac{1}{t}}{2} = \dfrac{t^2+1}{2t}$, et par ailleurs $dt = e^x\, dx$,

soit $dx = \frac{1}{t}\,dt$, ce qui donne donc $I(x) = \int \frac{2t}{1+t^2} \times \frac{1}{t}\,dt = \int \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\arctan(t) + K = 2\arctan(e^x) + K$, avec $K \in \mathbb{R}$. Alternativement, on peut présenter le calcul sous forme d'intégrale définie avec comme bornes (par exemple) 0 et x, ce qui donne alors une valeur de la constante K égale à $-\frac{\pi}{2}$.

4. Notons $g(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ (puisque chacune des deux fonctions arctan et sh sont définies sur $\mathbb{R}$), et elle y est dérivable comme quotient de fonctions usuelles dérivables. On calcule $g'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}^2(x)}$. Or, on sait que $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ pour tout réel x, donc $1 + \operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}^2(x)$, et $g'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$. D'après la question précédente, il existe donc une constante K telle que $g(x) = 2\arctan(e^x) + K$. En évaluant l'égalité lorsque $x = 0$, on obtient $\arctan(\operatorname{sh}(0)) = 2\arctan(1) + K$, soit $0 = 2 \times \frac{\pi}{4} + K$, et donc $K = -\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à la formule annoncée par l'énoncé.
5. Nous avons déjà résolu à la première question l'équation homogène associée à l'équation (E), il ne reste donc plus qu'à en déterminer une solution particulière en utilisant la méthode de variation de la constante. Posons donc $y_p(x) = \frac{K(x)}{\operatorname{ch}(x)}$, la fonction y_p est solution de (E) si $\operatorname{ch}(x) \times \frac{K'(x)\operatorname{ch}(x) - K(x)\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} + \frac{\operatorname{sh}(x)K(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \ln(1+x^2)$, condition qui se réduit très simplement à $K'(x) = \ln(1+x^2)$. Pour calculer une primirive de cette fonction, on va effectuer une IPP en posant $v(x) = \ln(1+x^2)$, donc $v'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, et $u'(x) = 1$, ce qui permet de prendre $u(x) = x$ (les deux fonction sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). On obtient ainsi $\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - \int 2 - \frac{2}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) + L$, avec $L \in \mathbb{R}$. On peut donc prendre $y_p(x) = \frac{x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)}{\operatorname{ch}(x)}$, et les solutions de (E) sont alors les fonction de la forme $y : x \mapsto \frac{x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) + L}{\operatorname{ch}(x)}$, avec $L \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Les racines onzièmes de l'unité peuvent s'écrire sous la forme $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{11}}$, avec $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$, ou si on préfère $z_k = a^k$, puisque $a^k = (e^{i\frac{2\pi}{11}})^k = e^{i\frac{2k\pi}{11}}$. En particulier, le nombre a lui-même est une racine onzième de l'unité (correspondant à $k = 1$ dans notre liste), donc $a^{11} = 1$.
2. On sait que $\overline{e^{it}} = e^{-it}$ pour tout réel t, donc $\overline{e^{i\frac{2k\pi}{11}}} = e^{-i\frac{2k\pi}{11}} = e^{i\frac{(22-2k)\pi}{11}}$, puisque $\frac{(22-2k)\pi}{11} = 2\pi - \frac{2k\pi}{11} \equiv -\frac{2k\pi}{11}[2\pi]$. Ainsi, on a en particulier $\overline{a} = e^{i\frac{20\pi}{11}} = a^{10}$, et de même $\overline{a^3} = a^8$; $\overline{a^4} = a^7$; $\overline{a^5} = a^6$ et $\overline{a^9} = a^2$. Une simple addition de ces conjugués donne bien $\overline{S} = T$.
3. En regroupant, on trouve $S + T = \sum_{k=1}^{10} a^k = \sum_{k=0}^{10} a^k - 1$. Or, on sait que la somme de toutes les racines onzièmes de l'unité est nulle, donc $S + T = -1$.
   Pour le produit, on bourrine et on essaye de simplifier, en utilisant systématiquement le fait que $a^{11} = 1$ pour ne pas garder de puissance plus grande que 10 : $ST = (a + a^3 + a^4 + a^5 + a^9)(a^2 + a^6 + a^7 + a^8 + a^{10}) = a^3 + a^7 + a^8 + a^9 + 1 + a^5 + a^9 + a^{10} + 1 + a^2 + a^6 + a^{10} + 1 + a + a^3 + a^7 + 1 + a + a^2 + a^4 + 1 + a^4 + a^5 + a^6 + a^8 = 5 + 2a + 2a^2 + 2a^3 + 2a^4 + 2a^5 + 2a^6 + 2a^7 + 2a^8 + 2a^9 + 2a^{10} = 5 + 2(S + T) = 3$.

4. On connait la somme et le produit des deux nombres, qui sont donc solutions de l'équation $x^2+x+3=0$. Cette dernière a pour discriminant $\Delta = 1-12=-11$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{11}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{11}}{2}$. Reste à déterminer laquelle de ces deux racines est égale à S, et laquelle est égale à T. Pour celà, il faut déterminer lequel des deux nombres a une partie imaginaire positive. Or, la partie imaginaire de S est égale à $\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)+\sin\left(\dfrac{6\pi}{11}\right)+\sin\left(\dfrac{8\pi}{11}\right)+\sin\left(\dfrac{10\pi}{11}\right)+\sin\left(\dfrac{18\pi}{11}\right)$. Dans cette somme, les quatre premiers sinus sont positifs puisqu'ils correspondent à des angles appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$. De plus, $\sin\left(\dfrac{18\pi}{11}\right) = -\sin\left(\dfrac{4\pi}{11}\right)$, et $\sin\left(\dfrac{4\pi}{11}\right) < \sin\left(\dfrac{5\pi}{11}\right) = \sin\left(\dfrac{6\pi}{11}\right)$, donc $\sin\left(\dfrac{18\pi}{11}\right)+\sin\left(\dfrac{6\pi}{11}\right) > 0$ et a fortiori $\Im(S) > 0$, ce qui prouve que $S = x_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{11}}{2}$, et donc $T = x_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{11}}{2}$.
5. C'est un calcul assez direct : $i\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) = i\times\dfrac{\sin(\frac{3\pi}{11})}{\cos(\frac{3\pi}{11})} = i\times\dfrac{\frac{e^{i\frac{3\pi}{11}}-e^{-i\frac{3\pi}{11}}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{3\pi}{11}}+e^{-i\frac{3\pi}{11}}}{2}} = \dfrac{e^{-i\frac{3\pi}{11}}(e^{i\frac{6\pi}{11}}-1)}{e^{-i\frac{3\pi}{11}}(e^{i\frac{6\pi}{11}}+1)} = \dfrac{a^3-1}{a^3+1}$.
6. Il s'agit d'une somme géométrique (de raison $-a^3$), mais il manque le premier terme (pour $k=0$ pour pouvoir appliquer directement la formule du cours. Ajoutons-le donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-a^3)^k = \sum_{k=0}^{10}(-a^3)^k - 1 = \frac{1-(-a^3)^{11}}{1-(-a^3)} - 1 = \frac{1+a^{33}-1-a^3}{1+a^3} = \frac{1-a^3}{1+a^3}$ puisque $a^{33} = (a^{11})^3 = 1$. Le calcul de la question précédente prouve alors que $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-a^3)^k = -i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$.
7. On applique encore une fois les formules d'Euler : $4i\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = 2(e^{i\frac{2\pi}{11}} - e^{-i\frac{2\pi}{11}}) = 2(a-a^{10})$ puisqu'on a déjà signalé plus haut que $a^{10} = e^{i\frac{20\pi}{11}} = e^{-i\frac{2\pi}{11}}$.
8. D'après les questions 5 et 6, on a $i\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-a^3)^k = a^3-a^6+a^9-a^{12}+a^{15}-a^{18}+a^{21}-a^{24}+a^{27}-a^{30} = a^3-a^6+a^9-a+a^4-a^7+a^{10}-a^2+a^5-a^8$. En ajoutant le résultat de la question 7, on a donc $i\left(\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)+4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)\right) = i\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)+2a-2a^{10} = a+a^3+a^4+a^5+a^9-a^2-a^6-a^7-a^8-a^{10} = S-T$. Quitte à diviser par i, donc à multiplier par $-i$, on trouve bien la formule demandée : $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)+2\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = i(T-S)$, qui est bien égal à $\sqrt{11}$ vu les formules obtenus à la question 4.

Problème

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire.

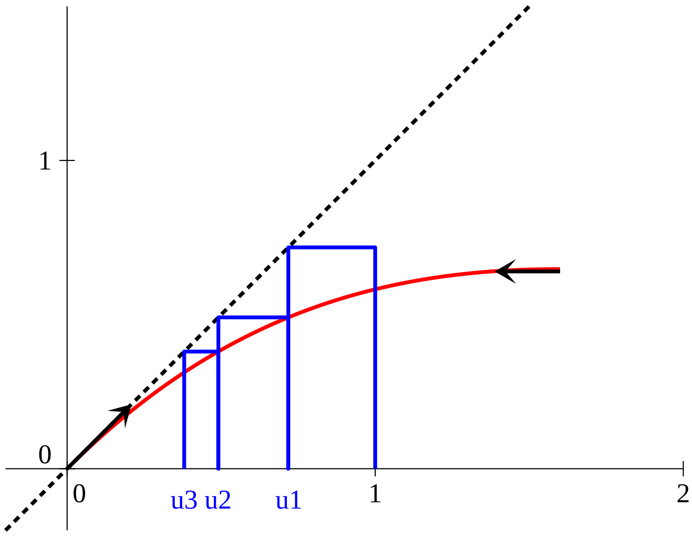
1. La fonction g est bien entendue définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et produit de fonctions usuelles. De plus, $g'(x) = -e^x+(2-x)e^x = (1-x)e^x$, qui est du signe de $1-x$. Pour compléter le tableau de variations, on calcule $g(0) = 2-2 = 0$, $g(1) = e-2$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée, sous la forme donnée dans l'énoncé, le produit devant le -2 tend clairement vers $-\infty$).

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	$-\infty$

2. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, donc effectue une bijection de cet intervalle vers son intervalle image $]-\infty, e-2]$. Comme $0 \in]-\infty, e-2]$ (puisque $e-2 \simeq 0.7 > 0$), le théorème de la bijection assure qu'il existe une solution unique à l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $[1,+\infty[$. De même, g est strictement croissante et continue sur $]0,1[$, et y effectue une bijection vers son intervalle image $]0, e-2[$. Puisque 0 n'appartient pas à cet intervalle image, l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0,1[$. Par contre, 0 est bien entendu solution de cette équation, et on a donc sur $\mathbb{R}^+$ deux solutions à l'équation : 0 et la deuxième solution a appartenant donc à $[1,+\infty[$.
3. On a déjà vu que la fonction g était strictement positive sur $]0,1[$ (et nulle en 0, bien entendu), et sa décroissance assure qu'elle reste positive sur $[1,a[$ (on a bien $a > 1$ puisque $g(a) > 0$) et négative sur $]a,+\infty[$. De plus, $g(2) = -2 < 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule nécessairement sur l'intervalle $]1,2[$. Puisque sa seule valeur d'annulation sur $\mathbb{R}^{+*}$ est égale à a, on a donc $1 < a < 2$.

Partie B : étude de la fonction f.

1. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ (taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0), donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1$, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Puisque l'énoncé a imposé $f(0) = 0$, la fonction est donc continue (à droite) en 0.
2. On a déjà calculé cette limite à la question précédente : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1$. Cette limite correspond exactement à celle du taux d'accroissement en 0 de la fonction f (puisque $f(0)$), la fonction f est donc dérivable en 0 et vérifie $f'(0) = 1$.
3. Par définition, le réel a vérifie $g(a) = 0$, soit $(2-a)e^a = 2$. Comme $a \neq 2$ (on a prouvé plus haut que $a < 2$), c'est équivalent à $e^a = \dfrac{2}{2-a}$. On peut alors calculer $f(a) = \dfrac{a^2}{e^a-1} = \dfrac{a^2}{\frac{2}{2-a}-1} = \dfrac{a^2(2-a)}{2-(2-a)} = a(2-a)$ puisque $a \neq 0$.
4. La fonction f est quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, et son dénominateur ne s'annulant pas, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme on a de plus prouvé qu'elle était dérivable en 0, f est en fait dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2x(e^x-1) - x^2e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{x(2e^x - 2 - xe^x)}{(e^x-1)^2} = \dfrac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, cette dérivée est du signe de $g(x)$, donc positive sur $[0,a]$ et négative ensuite.
5. Il manque le calcul de la limite en $+\infty$. Or, $f(x) = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$, on en déduit sans difficulté que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
6. On sait que $f(a) = a(2-a) \simeq 1.6 \times 0.4 \simeq 0.64$.



Partie C : étude d'une suite récurrente.

1. Voir sur le graphique précédent pour les premiers termes de la suite. La suite semble décroissante, et on dirait bien qu'elle converge vers 0.
2. Effectuons donc une belle récurrence. Au rang 0, il n'y a rien à faire puisque l'énoncé nous donne $u_0 = 1$. Supposons donc que $u_n \in [0, 1]$. On sait que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ (puisque $a > 1$), on peut donc affirmer que $0 \leq f(u_n) \leq 1$, c'est-à-dire que $0 \leq u_{n+1} \leq e - 2 < 1$, ce qui prouve en particulier que $u_{n+1} \in [0, 1]$ et achève la récurrence.
3. Allons-y donc pour une deuxième récurrence. On sait que $u_1 = f(1) = e - 2 < 1$ donc $u_1 - u_0 < 0$, ce qui prouve la propriété au rang 0. Supposons désormais la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq u_n$. Comme on sait que tous les termes de la suite sont dans $[0, 1]$ et que la fonction f est toujours croissante sur cet intervalle, on en déduit que $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, c'est-à-dire que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$, ce qui prouve la propriété souhaitée au rang suivant. On a donc toujours $u_{n+1} \leq u_n$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.
4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc.
5. (a) Si $x \neq 0$, $e^x - 1 \neq 0$, donc $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x(e^x - 1)$. Toujours sous l'hypothèse que $x \neq 0$, on peut simplifier par x pour obtenir $x = e^x - 1$, soit $e^x - x - 1 = 0$ (chacune des étapes étant bien une équivalence).

   (b) La fonction h est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $h'(x) = e^x - 1$, qui est toujours positive sur $\mathbb{R}^+$, et ne s'annule que pour $x = 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et comme $h(0) = 1 - 1 = 0$, elle ne prend que des valeurs strictement positives lorsque $x > 0$. Comme la fonction h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$, la question précédente assure que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution strictement positive, et donc pas d'autre solution que $x = 0$.
6. Notons l la limite de la suite (u_n). La suite extraite (u_{n+1}) converge elle aussi vers cette même limite l. Or $u_{n+1} = f(u_n)$, et la fonction f est continue en tout réel $l \in [0, +\infty[$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$ (la limite l est évidemment positive ou nulle). Autrement dit, on doit nécessairement avoir $f(l) = l$ pour que la limite de (u_{n+1}) soit unique, ce qui impose d'après la question précédente $l = 0$. Conclusion : comme prévu, la suite (u_n) converge vers 0.