

Devoir Commun

PTSI Lycée Eiffel

6 février 2018

Durée : 3H30. Calculatrices interdites.

Exercice 1

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $\begin{cases} \operatorname{ch}(x)y' + \operatorname{sh}(x)y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
2. On pose pour cette question $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.
 - (a) Préciser le domaine de définition de f , sa parité éventuelle, ainsi que ses limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
 - (b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet.
 - (c) Tracer une allure de la courbe représentative de f .
3. Pour tout réel x , on note I une primitive de la fonction f . Justifier l'existence de $I(x)$ et calculer sa valeur à l'aide du changement de variable $t = e^x$.
4. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\operatorname{sh}(x)) = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$.
5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \operatorname{ch}(x)y' + \operatorname{sh}(x)y = \ln(1+x^2)$.

Exercice 2

On note dans tout cet exercice $a = e^{\frac{2i\pi}{11}}$.

1. Rappeler la valeur des racines onzièmes de l'unité (on les exprimera en fonction de a). Que vaut a^{11} ?
2. On pose $S = a + a^3 + a^4 + a^5 + a^9$ et $T = a^2 + a^6 + a^7 + a^8 + a^{10}$. Montrer que S et T sont deux nombres complexes conjugués.
3. Calculer $S + T$ et ST (on doit trouver deux nombres entiers).
4. En déduire les valeurs de S et T .
5. Montrer que $i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{a^3 - 1}{a^3 + 1}$ (on pourra utiliser les formules d'Euler).
6. Calculer $\sum_{k=1}^{10} (-a^3)^k$, et comparer cette valeur à celle de $i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$.
7. Vérifier que $4i \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = 2(a - a^{10})$.
8. Montrer que $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i(T - S) = \sqrt{11}$.

Problème

On s'intéresse dans ce problème à la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire.

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = (2 - x)e^x - 2$.

1. Étudier les variations de g et dresser un tableau de variations complet (limites incluses) de g .
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle, que l'on notera a .
3. Étudier le signe de $g(x)$ et montrer que $1 < a < 2$.

Partie B : étude de la fonction f .

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
3. Montrer que $f(a) = a(2 - a)$, où a est le réel défini dans la partie A.
4. Calculer $f'(x)$ après avoir justifié son existence, et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .
6. Tracer une allure précise de la courbe de f sur l'intervalle $[0, a]$, en précisant les tangentes à cette courbe aux points d'abscisse 0 et a . On donne $a \simeq 1,6$, on pourra prendre 4 cm comme unité graphique.

Partie C : étude d'une suite récurrente.

On définit désormais une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer les premiers termes de la suite (u_n) sur la courbe de f en vous aidant de la première bissectrice. Que peut-on conjecturer sur la monotonie et la convergence de la suite (u_n) ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Montrer par récurrence que $u_{n+1} - u_n \leq 0$, en déduire la monotonie de la suite (u_n) .
4. Montrer que (u_n) est convergente.
5. On souhaite prouver que l'équation $f(x) = x$ n'a pas d'autre solution que sa solution évidente $x = 0$.
 - (a) Montrer que, si $x \in]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $e^x - x - 1 = 0$.
 - (b) Étudier les variations de la fonction $h : x \mapsto e^x - x - 1$, et conclure.
6. Déterminer rigoureusement la limite de la suite (u_n) .