Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

25 mai 2018

Exercice 1

1. C'est immédiat : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. On peut effectuer des opérations sur les lignes (ou les colonnes) pour simplifier largement le calcul, mais ce n'est pas vraiment nécessaire, développons directement par rapport à la deuxième ligne : $\det(A) = -2 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \times (-2) - 2 \times (-2) = 8$. Ce déterminant étant non nul, la matrice A est inversible, ce qui revient à dire que l'application f est bijective.

3. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$. Pour obtenir une relation de la forme $A^2 = aA + bI$, les coefficients en-dehors de la diagonale imposent $a = 4$. Ensuite, on déduit de la diagonale $b = -4$. Autrement dit, $A^2 = 4A - 4I$.

4. ON peut réecrire l'égalité précédente sous la forme $A(4I - A) = 4I$, ou encore $A\left(I - \dfrac{1}{4}A\right) = I$. De façon équivalente, on aura $f \circ \left(id - \dfrac{1}{4}f\right) = id$, donc $f^{-1} = id - \dfrac{1}{4}f$.

5. Déterminer le noyau de $f - 2\,id$ revient à résoudre le système $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. Les trois équations sont manifestement équivalentes, et se ramènent simplement à $y = x + z$. On a donc $\ker(f - 2\,id) = \text{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$. En particulier, $\dim(\ker(f - 2\,id)) = 2$ (la famille génératrice obtenue étant une base puisque ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires).

6. Il y a bien sûr plein de méthodes possibles, mais pour exploiter les choses étudiées dans notre dernier chapitre, écrivons la matrice de la famille en question dans la base canonique (matrice qui sera donc exactement la matrice de passage P demandée deux questions plus loin) : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour montrer que la famille est une base, il suffit de calculer son déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ (en effectuant l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ puis en développant par rapport à la dernière colonne). Ce déterminant étant non nul, notre famille est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

7. Il n'est pas question ici de calculer cette matrice à coups de matrices de passage, mais bien de faire un calcul direct. Si on note $v = (1,1,0)$, et $w = (0,1,1)$, on a par définition $f(v) = 2v$ et $f(w) = 2w$ puisque ces deux vecteurs appartient à $\ker(f - 2\,id)$. Reste à calculer l'image de u et à l'exprimer en fonction de u, v et w : $f(1,1,1) = (3,4,3) = (1,1,0) + (0,1,1) + 2(1,1,1)$,

soit $f(u) = v + w + 2u$ (si on n'arrive pas à trouver cette décomposition à vue d'oeil, on peut bien entendu résoudre un petit système. En gardant les trois vecteurs dans l'ordre (v, w, u), la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. On a déjà donné P plus haut. Pour l'inverser, résolvons le système $\begin{cases} x & & + & z & = & a \\ x & + & y & + & z & = & b \\ & & y & + & z & = & c \end{cases}$.
En soustrayant la première puis la troisième ligne à la deuxième, on obtient immédiatement $y = b - a$ et $x = b - c$, dont on déduit que $z = c - y = a - b + c$. Bref, l'inverse de la matrice P (dont on savait déjà qu'elle était inversible en tant que matrice de passage) est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. On calcule facilement $T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, puis $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 12 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. On sait que $T = P^{-1}AP$, donc $A = PTP^{-1}$, et $A^3 = PT^3P^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 20 \\ 8 & 8 & 32 \\ 0 & -8 & 20 \end{pmatrix} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & -12 & 12 \\ 24 & -16 & 24 \\ 12 & -12 & 20 \end{pmatrix}$.
On en déduit que $f^2(x, y, z) = (20x - 12y + 12z; 24x - 16y + 24z; 12x - 12y + 20z)$. On remarque aussi en passant qu'on a effectué le calcul de manière particulièrement stupide, il est bien sûr plus rapide de calculer directement A^3.

Exercice 2

1. Le plus simple est de dresser un arbre complet des possibilités pour les trois premiers tirages. On constate alors que $P(R_1) = \frac{2}{3}$, puis $P(R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ (soit on a tiré rouge puis rouge, soit bleue puis rouge), et enfin $P(R_3) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ (cette fois, les possibilités sont RBR, BRR et BBR avec les notations évidents ; si on tiré deux rouges aux deux premiers tirages, on ne peut pas en tirer une troisième ensuite puisqu'il n'en reste alors plus dans l'urne).

2. Autant revenir à la définition : $P(B_2) = 1 - P(R_2) = \frac{5}{9}$ (qu'on peut bien sûr retrouver directement en exploitant à nouveau l'arbre), et $P(B_2 \cap R_3) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ (les deux possibilités ici sont RBR et BBR). On a donc $P_{B_2}(R_3) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}$. Cette probabilité étant différente de $P(R_3)$, les deux événements ne sont pas indépendants.

3. Même principe : $P(B_3) = 1 - P(R_3) = \frac{19}{27}$, et $P(B_3 \cap R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 23 = \frac{10}{27}$ (les cas favorables sont RRB et BRB), donc $P_{B_3}(R_2) = \frac{\frac{10}{27}}{\frac{19}{27}} = \frac{10}{19}$. Cette probabilité est légèrement supérieure à celle de $P(R_2)$. Ce n'est pas si évident à interpréter logiquement, mais le fait de tirer une boule bleue au troisième tirage augmente légèrement la probabilité d'avoir tiré des rouges à chacun des deux tirages précédents, puisque plus on tire de boules rouges, plus on a de chances de tirer des boules bleues ensuite.

4. Si $n = 1$, $X_n(\Omega) = 1, 2$, et si $n \geqslant 2$, $X_n(\Omega) = 0, 1, 2$ (il faut au moins deux tirages pour qu'il ne reste plus de boules rouges dans l'urne).

5. On a déjà calculé $P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}$ (c'est la probabilité de tirer une boule rouge lors du premier tirage), et $P(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$. On en déduit que $E(X_1) = \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Tout aussi facilement, on calcule $E(X_1^2) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$. D'après la formule de König-Huygens, on a alors $V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$. Pour X_2, l'événement $X_2 = 0$ revient à dire qu'on a tiré deux boules rouges lors des deux premiers tirages, donc $P(X_2 = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Au contraire, pour vérifier $X_2 = 2$, on doit avoir tiré deux boules bleues, soit $P(X_2 = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. La somme des trois probabilités devant être égale à 1, on en déduit que $P(X_2 = 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. On calcule ensuite $E(X_2) = \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, puis $E(X_2^2) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9}$ et enfin $V(X_2) = \frac{10}{9} - \frac{64}{81} = \frac{26}{81}$.
6. Pour que l'événement $X_n = 2$ soit réalisé, il faut tirer des boules bleues à chacun des n premiers tirages, ce qui se produit à chaque fois avec probabilité $\frac{1}{3}$, donc $P(X_n = 2) = \frac{1}{3^n}$.
7. (a) En mode pas très rigoureux : pour obtenir $X_{n+1} = 1$ (une boule dans l'urne à l'issue du tirage $n + 1$), il y a deux possibilités :
   - il y avait déjà une boule rouge dans l'urne à l'issue du tirage n (probabilité u_n) et on a tiré une boule bleur au tirage $n + 1$ (probabilité $\frac{2}{3}$ puisqu'il y a une boule rouge et deux bleues dans l'urne).
   - il y avait encore deux boules rouges dans l'urne à l'issue du tirage n (probabilité $\frac{1}{3^n}$, c'est ce qu'on a calculé à la question d'avant), et un tire une boule rouge au tirage $n+1$ (probabilité $\frac{2}{3}$ puisqu'il y a cette fois deux boules rouges et une bleue dans l'urne).

   En additionnant les probabilités des deux cas (qui sont incompatibles), on obtient exactement la formule de l'énoncé.
   En mode plus rigoureux, on applique la formule des probabilités totales au système complet constitué par les trois événements $X_n = 0$, $X_n = 1$ et $X_n = 2$ pour obtenir $u_{n+1} = P(X_n = 0) \times P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1) \times P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2) \times P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)$. La première probabilité conditionnelle est nulle, la deuxième vaut $\frac{2}{3}$, la dernière vaut $\frac{2}{3}$ également, on conclut en fait comme ci-dessus.

   (b) Calculons donc $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{2}{3^n}\right) = \frac{2}{3}v_n$. La suite (v_n) est bien géométrique, de raison $\frac{2}{3}$.

   (c) Comme $v_1 = u_1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, on a donc $v_n = \frac{4}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{n+1}}{3^n}$. En découle $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n} - \frac{2}{3^n} = \frac{2^{n+1} - 2}{3^n}$.
8. On calcule simplement $P(X_n = 0) = 1 - P(X_n = 2) - P(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{3^n} - \frac{2^{n+1} - 2}{3^n} = 1 - \frac{2^{n+1} - 1}{3^n}$.
9. On revient à la définition : $E(X_n) = \frac{2^{n+1} - 2}{3^n} + \frac{2}{3^n} = \frac{2^{n+1}}{3^n}$.
10. À un facteur 2 près qui ne va pas changer la limite, on a une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, qui va donc tendre vers 0. Ce qui revient simplement à dire que, quand on fait augmenter le nombre de tirages, les boules rouges finissent par disparaitre de l'urne. C'est tout à fait normal.