

Devoir Surveillé n° 8

PTSI B Lycée Eiffel

25 mai 2018

Exercice 1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (3x - y + z; 2x + 2z; x - y + 3z)$.

1. Donner la matrice A de l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le déterminant de A . Que peut-on en déduire sur l'application f ?
3. Calculer A^2 , et déterminer deux constantes a et b telles que $A^2 = aA + bI$.
4. En déduire une expression de f^{-1} en fonction de f et de id (on ne fera pas le calcul de l'expression explicite).
5. Déterminer la dimension et une base de $\ker(f - 2id)$.
6. On pose $u = (1, 1, 1)$. Montrer qu'en complétant la base obtenue à la question précédente par le vecteur u , on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice T de l'application f dans la base $\mathcal{B}$.
8. Donner la matrice de passage P de la base canonique vers $\mathcal{B}$, et calculer son inverse P^{-1} .
9. Calculer T^3 , et déduire des questions précédentes l'expression de f^3 .

Exercice 2

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue. On effectue dans cette urne une suite de tirages, en effectuant les actions suivantes :

- si on tire une boule bleue, on la remet dans l'urne.
- si on tire une boule rouge, on ne la remet pas dans l'urne mais on met à sa place une boule bleue de plus dans l'urne (ainsi, l'urne contiendra toujours exactement trois boules).

On note B_n l'événement « On tire une boule bleue lors du n -ème tirage » et R_n l'événement « On tire une boule rouge lors du n -ème tirage ». On notera également X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne après n tirages.

1. Calculer $P(R_1)$, $P(R_2)$ et $P(R_3)$.
2. Calculer $P_{B_2}(R_3)$ et comparer la valeur obtenue à celle de $P(R_3)$. Les deux événements sont-ils indépendants ?
3. Calculer $P_{B_3}(R_2)$ et comparer cette valeur à celle de $P(R_2)$. Expliquer pourquoi ce résultat est intuitivement logique.
4. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X_n (en distinguant des cas si nécessaire).
5. Déterminer explicitement les lois des variables aléatoires X_1 et X_2 , et calculer leur espérance et leur variance.
6. Pour tout entier naturel n , calculer $P(X_n = 2)$.
7. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = P(X_n = 1)$.
 - (a) Montrer que $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$.
 - (b) En posant $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$, vérifier que la suite (v_n) est une suite géométrique.
 - (c) En déduire la valeur de v_n puis celle de u_n .
8. Déduire des questions précédentes la valeur de $P(X_n = 0)$.
9. Calculer l'espérance de la variable X_n .
10. Quelle est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $E(X_n)$? Expliquer ce résultat.