Devoir Surveillé n^o 7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

28 avril 2018

Exercice 1

1. Les fonctions f_n sont définies, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ (comme somme de deux fonctions croissantes). De plus, $f_n(0) = 1 - 2 = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, donc f_n effectue une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$, ce qui suffit à assurer l'existence d'une unique solution strictement positive (0 ne convenant manifestement pas) à l'équation $f_n(x) = 0$. Lorsque $n = 0$, on a $f - 0(x) = x - 1$, donc $u_0 = 1$.
2. (a) Par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, donc $e^{(n+1)u_{n+1}} = 2 - u_{n+1}$. On en déduit que $f_n(u_{n+1}) = e^{nu_{n+1}} + u_{n+1} - 2 = e^{nu_{n+1}} - e^{(n+1)u_{n+1}} = e^{nu_{n+1}}(1 - e^{u_{n+1}})$. Le facteur exponentiel est évidemment positif, et la parenthèse est négative car $u_{n+1} > 0$ (cf question précédente) donc $e^{nu_{n+1}} > 1$. Finalement, $f_n(u_{n+1}) < 0$.

   (b) Comme $f_n(u_n) = 0$, on a donc $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$, ce qui par croissance de la fonction f_n implique $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante. Étant minorée par 0, elle converge nécessairement d'après le théorème de convergence monotone.

   (c) Puisque la suite est positive, sa limite finie l, si elle n'est pas nulle, est nécessairement strictement positive. Mais alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = +\infty$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{nu_n} = +\infty$. Or, $e^{nu_n} = 2 - u_n$, qui lui a une limite égale à $2 - l$. Ceci est incohérent, ce qui prouve que la limite l ne peut pas être strictement positive, et donc que $l = 0$.
3. (a) C'est essentiellement évident : $e^n u_n = 2 - u_n$, donc $nu_n = \ln(2 - u_n)$ (tout est strictement positif), et donc $u_n = \dfrac{1}{n} \ln(2 - u_n)$.

   (b) Puisque (u_n) tend vers 0, on a simplement $u_n \sim \dfrac{\ln(2)}{n}$ d'après la question précédente.

   (c) On reprend la même expression, mais en écrivant $u_n = \dfrac{\ln(2)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $u_n = \dfrac{1}{n} \ln\left(2 - \dfrac{\ln(2)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$. Or, grâce à l'équivalent classique de $\ln(1 + u)$ quand u tend vers 0, on peut calculer $\ln\left(2 - \dfrac{\ln(2)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 - \dfrac{\ln(2)}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln(2) - \dfrac{\ln(2)}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, d'où $u_n = \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   (d) On reprend le calcul précédent, mais avec un DL2 du ln : $\ln\left(1 - \dfrac{\ln(2)}{2n} + \dfrac{\ln(2)}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = -\dfrac{\ln(2)}{2n} + \dfrac{\ln(2)}{4n^2} - \dfrac{\ln^2(2)}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $u_n = \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{2n^2} + \dfrac{2\ln(2) - \ln^2(2)}{8n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 2

1. Les matrices appartenant à F sont de la forme $\begin{pmatrix} -2b & b \\ c & 2c \end{pmatrix}$, avec $(a,c) \in \mathbb{R}^2$, donc $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ est un sous-espace vectoriel de E, et il est de dimension 2 puisque la famille génératrice obtenue en est clairement une base (les deux matrices ne sont pas proportionnelles).
2. L'espace G est lui-même de dimension 2 (la matrice A n'étant pas proportionnelle à I), donc $\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(E)$. Pour montrer la supplémentarité, on va de plus vérifier que $E = F + G$, ce qui va resservir à la question suivante. Soit donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, essayons d'écrire $M = x\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + zI + tA$. Cette égalité peut se traduire par le système suivant : $\begin{cases} -2x + z = a \\ x + 2t = b \\ y - t = c \\ 2y + z = d \end{cases}$. On peut résoudre par substitutions successives : $z = a + 2x$, donc $y = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}a - x$, puis $t = y - c = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}a - c - x$, et enfin en remettant tout dans la deuxième équation $x + d - a - 2c - 2x = b$, soit $x = -a - b - 2c + d$, dont on déduit $y = \frac{1}{2}a + b + 2c - \frac{1}{2}d$, $z = -a - 2b - 4c + 2d$ et $t = \frac{1}{2}a + b + c - \frac{1}{2}d$. La solution du système existant toujours (et étant accessoirement unique), on a prouvé que $F \oplus G = E$.
3. On vient de décomposer toute matrice $M \in E$ sous la forme $M_F + M_G$, avec $M_F \in F$ et $M_G \in G$. Par définition, on a alors $p(M) = zI + tA$ (en gardant les notations de la question précédente), soit $p(M) = \begin{pmatrix} -a - 2b - 4c + 2d & a + 2b + 2c - d \\ -\frac{1}{2}a - b - c + \frac{1}{2}d & -a - 2b - 4c + 2d \end{pmatrix}$. Ensuit, on peut utiliser le fait que $s = 2p - id$ (c'est du cours), ou simplement calculer $s(M) = M_G - M_F$. Dans les cas, on obtient bien entendu le même résultat : $s(M) = \begin{pmatrix} -3a - 2b - 4c + 2d & 2a + 3b + 2c - d \\ -a - 2b - 3c + d & -2a - 4b - 8c + 3d \end{pmatrix}$. Les plus courageux vérifieront qu'avec ces expressions on a bien $p \circ p = p$, et $s \circ s = id$.
4. (a) L'application f est manifestement à valeurs dans E, vérifions qu'elle est bien linéaire : $f(\lambda M + N) = A^2(\lambda M + N) + (\lambda M + N)A - 2(\lambda M + N) = \lambda A^2 M + A^2 N + \lambda MA + NA - 2\lambda M - 2N = \lambda f(M) + f(N)$. L'application f est bien un endomorphisme de E.
   (b) On calcule aisément $A^2 = -2I$, donc $f(M) = MA - 4M = \begin{pmatrix} -b - 4a & 2a - 4b \\ -d - 4c & 2c - 4d \end{pmatrix}$.
   (c) Pour le noyau on doit avoir simultanément $-b - 4a = 2a - 4b = 0$, ce qui n'est possible que si $a = b = 0$; et $-d - 4c = 2c - 4d = 0$, ce qui n'est possible que si $c = d = 0$. Bref, $\ker(f) = \{0\}$. Mais comme il s'agit d'un endomorphisme dans un espace vectoriel de dimension finie, on aura alors automatiquement $\text{Im}(f) = E$, pas besoin de calcul supplémentaire (c'est une application directe du théorème du rang).
   (d) Son noyau étant nul, f est injective, et elle est donc surjective et bijective en tant qu'endomorphisme en dimension finie.

Exercice 3

1. La fonction f est définie si et seulement si ce qui se trouve à l'intérieur de la valeur absolue est strictement positif, donc défini (il faut supprimer la valeur interdite 1) et différent de 0 (il faut enlever -1). Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$. Ce domaine est symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = (x^2 - 1)\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = -(x^2 - 1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, donc la fonction f est impaire.

2. Au voisinage de 0, $1+x$ et $1-x$ sont tous les deux positifs, et on peut même séparer le quotient pour écrire $f(x) = (x^2-1)(\ln(1+x)-\ln(1-x))$. On sait très bien que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$, et donc que $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$, dont on déduit que $\ln(1+x)-\ln(1-x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$, puis que $f(x) = 2x^3 - 2x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4) = -2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$. Puisque f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle y est dérivable, et l'équation de sa tangente est $y = -2x$. De plus, on a $f(x) + 2x \sim \frac{4}{3}x^3$, donc $f(x) + 2x$ est positif à droite de 0 et négatif à gauche de 0 (en restant au voisinage de 0, bien entendu), et la courbe sera en-dessous de sa tangente à gauche de 0, et au-dessus à droite.

3. (a) En constatant que $1 + \frac{2X}{1-X} = \frac{1+X}{1-X}$, il s'agit au signe près du développement limité qu'on a déjà calculé, pas besoin de se fatiguer donc : $(1-X^2)\ln\left(1+\frac{2X}{1-X}\right) = 2X - \frac{4}{3}X^3 + o(X^3)$.

   (b) Posons donc $X = \frac{1}{x}$, et calculons $f(x) = \left(\frac{1}{X^2}-1\right)\ln\left|\frac{1+\frac{1}{X}}{1-\frac{1}{X}}\right|$, soit $X^2 f(x) = (1-X^2)\ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right)$ (puisqu'au voisinage de 0, $|X-1| = 1-X$), ce qui est exactement ce dont on vient de calculer un DL en 0 à la question précédente. On peut donc immédiatement affirmer (en divisant tout par X^2) que $f(x) = \frac{2}{X} - \frac{4}{3}X + o(X)$, soit $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 2x - \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

   (c) Oui, la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x$, et comme $f(x) - 2x \sim -\frac{4}{3x} < 0$ au voinage de $+\infty$, la courbe sera en-dessous de son asymptote quand x tend vers $+\infty$.

   (d) On peut constater que le même calcul reste valable tel quel, ou utiliser l'imparité de la fonction f : la courbe admet la même asymptote oblique d'équation $y = 2x$ en $-\infty$, mais cette fois la courbe sera localement au-dessus de cette asymptote.

4. On peut toujours écrire $f(x) = (x^2-1)\ln|1+x| - (x^2-1)\ln|1-x|$, et le premier terme de cette différence a certainement une limite nulle en 1. Reste donc à gérer le second : on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ (croissance comparée classique), donc $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln|1-x| = 0$ (la valeur absolue ne change rien, si ce n'est éventuellement le signe du calcul), et $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\ln|1-x| = 0$ (on se contente de multiplier par $x+1$ la limite précédente). La fonction f est donc prolongeable par continuité en 1, en posant $f(1) = 0$. Pour savoir si ce prolongement est dérivable, on calcule le taux d'accroissement $\tau_1(h) = \frac{f(1+h)}{h} = \frac{((1+h)^2-1)}{h}\ln\left|\frac{2+h}{h}\right| = (2+h)\ln\left|1+\frac{2}{h}\right|$. Il n'y a même pas de forme indéterminée ici : $\lim\limits_{h\to 0}\tau_1(h) = +\infty$, donc la fonction prolongée n'est pas dérivable en 1 (la courbe y admettra une tangente verticale).

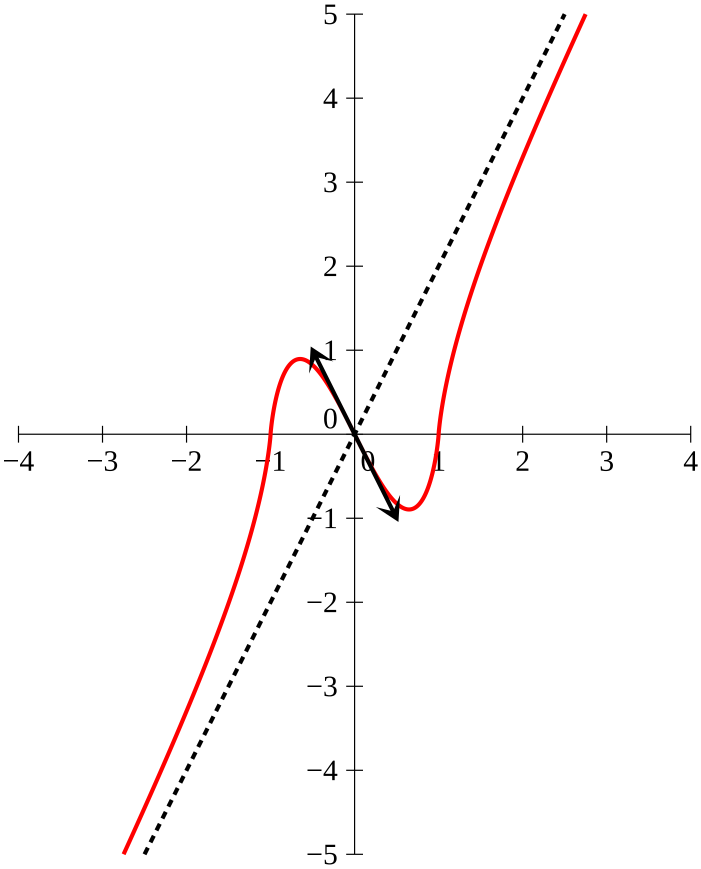
5. En utilisant le résultat donné dans l'énoncé, $f'(x) = 2x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - (x^2-1)\times\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\times\frac{1-x}{1+x} = 2x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - (x^2-1)\times\frac{2}{1-x^2} = 2x\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x}\right) = 2xg(x)$.

6. Dérivons donc à son tour la fonction g (en reprenant une partie du calcul de dérivée de la question précédente) : $g'(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2+1-x^2}{x^2(1-x^2)} = \frac{x^2+1}{x^2(1-x^2)}$. Cette dérivée est du signe de $1-x^2$, donc positive sur tout l'intervalle $]0,1[$ et négative sur $]1,+\infty[$. Pour ce

dernier intervalle, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (aucune forme indéterminée ici, ce qui est dans le ln tendant vers 1), donc g est toujours positive sur $]1,+\infty[$ (même pas besoin de calculer l'autre limite). Par contre, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ (encore une fois, on a un ln qui a une limite nulle), mais $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$ (toujours pas de forme indéterminée !). La fonction g étant strictement croissante sur $]0,1[$, elle est bijective de cet intervalle vers $\mathbb{R}$, et en particulier s'annule exactement une fois entre 0 et 1. On calcule donc $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2 < 0$ (tout le monde sait bien que $\ln(3) \simeq 1.1 < 2$), et $g\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(7) - \frac{4}{3}$. Le signe est un peu moins flagrant, mais on peut dire par exemple que $\ln(7) > \ln(6) = \ln(3) + \ln(2) \simeq 1.8 > \frac{4}{3}$ pour justifier la positivité de cette valeur. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule donc sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$. Comme on a vu plus haut que f' était du même signe que g (quand $x > 0$ du moins), on peut dresser le tableau de variations complet suivant (en exploitant la parité et les calculs effectués précédemment) :

x	$-\infty$	-1	$-\alpha$	0	α	1	$+\infty$
f	$-\infty$	0	$\simeq 0.9$	0	$\simeq -0.9$	0	$+\infty$

7. On n'oublie bien sûr pas l'asymptote, la tangente en 0 et leurs positions relatives par rapport à la courbe :



Exercice 4

1. Quitte à multiplier chaque équation par 2 ou par 4, la détermination du noyau se ramène à la résolution du système $\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$. L'opération $L_2 - L_1$ donne alors $4y - 4z = 0$, soit $z = y$, ce qui en remplaçant dans la première équation donne immédiatement $x = 0$. On trouve alors à l'aide d'une des deux équations restantes $y = z = 0$, donc $\ker(f) = \{0\}$, ce qui signifie que l'application f est injective. Comme il s'agit d'un endomorphisme dans un espace de dimension finie, f est également surjective, et donc bijective.
2. En notant $f(x, y, z) = (X, Y, Z)$, on a $f^2(x, y, z) = \left(2X + \frac{Y}{2} - \frac{Z}{2}, \frac{X}{2} + \frac{5Y}{4} - \frac{Z}{4}, \frac{X}{2} + \frac{Y}{4} + \frac{3Z}{4}\right) =$ $\left(4x + y - z + \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}y - \frac{1}{8}z - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y - \frac{3}{8}z; x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z + \frac{5}{8}x + \frac{25}{16}y - \frac{5}{16}z - \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}y - \frac{3}{16}z;\right.$ $\left. x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}x + \frac{5}{16}y - \frac{1}{16}z + \frac{3}{8}x + \frac{3}{16}y + \frac{9}{16}z\right) = \left(4x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z; \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}y - \frac{3}{4}z; \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z\right)$. On calcule ensuite aisément $(f^2 - 3f)(x, y, z) = (-2x, -2y, -2z) = -2\,id(x, y, z)$, ce qui prouve bien que $f^2 - 3f + 2\,id = 0$.
3. D'après le calcul effectué à la question précédente, $f \circ (3\,id - f) = 2\,id$, ce qui prouve que f est bijective (ce qu'on savait déjà) et que sa réciproque est égale à $f^{-1} = \frac{3}{2}\,id - \frac{1}{2}f$. Autrement dit, $f^{-1}(x, y, z) = \frac{3}{2}(x, y, z) - \frac{1}{2}f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z; -\frac{1}{4}x + \frac{7}{8}y + \frac{1}{8}z; -\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y + \frac{9}{8}z\right)$.
4. (a) Hors de question de revenir aux coordonnées pour faire ces calculs : $p^2 = (f - id)^2 = f^2 - 2f + id$. Or, on a démontré que $f^2 - 3f + 2\,id = 0$, soit $f^2 = 3f - 2\,id$, donc $p^2 = 3f - 2\,id - 2f + id = f - id = p$, ce qui prouve que p est un projecteur. De même, $q^2 = (2\,id - f)^2 = 4\,id - 4f + f^2 = 4\,id - 4f + 3f - 2\,id = 2\,id - f = q$, donc q est également un projecteur.

   (b) Revenons cette fois aux coordonnées : $p(x, y, z) = \left(x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}, \frac{x}{2} + \frac{y}{4} - \frac{z}{4}, \frac{x}{2} + \frac{y}{4} - \frac{z}{4}\right)$. La détermination du noyau se ramène à la résolution d'un système dont les trois équations sont équivalentes à $2x + y - z = 0$, soit $z = 2x + y$, donc $\ker(p) = \text{Vect}((1, 0, 2); (0, 1, 1))$. En particulier, ce noyau est de dimension 2. Le théorème du rang assure donc que l'image de p sera de dimension 1. On peut l'obtenir soit en calculant les images des vecteurs de la base canonique, soit aussi (puisqu'il s'agit d'un projecteur), en résolvant le système $p(x, y, z) = (x, y, z)$, qui donne les équations $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{5}{4}z = 0$. La première équation donne évidemment $z = y$, et en reportant dans les deux autres on a alors $\frac{1}{2}x - y = 0$ (les deux équations sont identiques), soit $x = 2y$. On en déduit que $\text{Im}(p) = \text{Vect}((2, 1, 1))$.
   On effectue des calculs similaires pour notre deuxième projecteur q : $q(x, y, z)$ $= \left(-\frac{y}{2} + \frac{z}{2}, -\frac{x}{2} + \frac{3y}{4} + \frac{z}{4}, -\frac{x}{2} - \frac{y}{4} + \frac{5z}{4}\right)$. Pas la peine de résoudre un système pour calculer le noyau, il s'agit (au signe près) exactement du calcul effectué pour l'image de p juste avant. On a donc $\ker(q) = \text{Im}(p) = \text{Vect}((2, 1, 1))$. Pour déterminer l'image, passons pour changer par les images des vecteurs de la base canonoique : quitte à multiplier par 2 ou 4, on a $\text{Im}(q) = \text{Vect}((0, -1, -1); (-2, 3, -1); (2, 1, 5))$. On sait que cette image doit être de dimension 2 (théorème du rang) et on vérifie donc que, par exemple, $(2, 1, 5) = -(-2, 3, -1) - 4(0, -1, -1)$ est un vecteur inutile. De plus, on peut écrire $(0, -1, -1) = -(0, 1, 1) \in \ker(p)$, et $(-2, 3, -1) = -2(1, 0, 2) + 3(0, 1, 1) \in \ker(p)$. Chacun des deux vecteurs de notre famille génératrice de $\text{Im}(q)$ appartenant à $\ker(p)$, on a donc $\text{Im}(q) \subset \ker(p)$, mais comme les deux espaces sont de dimension 2, cette inclusion est nécessairement une égalité.

On aurait effectivement pu éviter bien des calculs en constatant simplement que $q = id - p$. Les projecteurs p et q sont donc des projecteurs « associés » : si p projette sur F parallèlement à G, alors q projette sur G parallèlement à F.

(c) Calculons donc $f \circ p = f \circ (f - id) = f^2 - f = 3f - 2\,id - f = 2(f - id) = 2p$. De même, $f \circ q = 2f - f^2 = 2f - 3f + 2\,id = 2\,id - f = q$.

(d) Soit on utlise le fait que les noyaux et images de nos deux projecteurs sont identiques pour montrer que leurs composées sont nulles, soit on fait à nouveau un petit calcul formel : $p \circ q = (f - id) \circ (2\,id - f) = 2f - f^2 - 2\,id + f = -(f^2 - 3f + 2\,id) = 0$, et de même dans l'autre sens.

(e) On va bien entendu prouver ce résultat par récurrence : lorsque $n = 0$, $2^0 p + q = p + q = id = f^0$, donc la relation est vraie. Si on la suppose vérifiée au rang n, en reprenant les résultats de la question précédente, $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (2^n p + q) = 2^n f \circ p + f \circ q = 2^{n+1} p + q$, ce qui prouve l'hérédité. On a donc bien $f^n = 2^n p + q = 2^n (f - id) + 2\,id - f = (2^n - 1) f + (2 - 2^n\,id)$, soit $f^n(x, y, z) = \left(2^{n+1}x - 2x + 2^{n-1}y - \frac{y}{2} - 2^{n-1}z + \frac{z}{2} + 2x - 2^n x, 2^{n-1}x - \frac{x}{2} \right.$ $+5 \times 2^{n-2}y - \frac{5y}{4} - 2^{n-2}z + \frac{z}{4} + 2y - 2^n y, 2^{n-1}x + \frac{x}{2} + 2^{n-2}y - \frac{y}{4} + 3 \times 2^{n-2}z - \frac{3z}{4}$ $\left. +2z - 2^n z\right) = \left(2^n x + \left(2^{n-1} - \frac{1}{2}\right) y + \left(\frac{1}{2} - 2^{n-1}\right) z; \left(2^{n-1} - \frac{1}{2}\right) x + \left(2^{n-2} + \frac{3}{4}\right) y \right.$ $\left. + \left(\frac{1}{4} - 2^{n-2}\right) z; \left(2^{n-1} + \frac{1}{2}\right) x + \left(2^{n-2} - \frac{1}{4}\right) y + \left(\frac{5}{4} - 2^{n-2}\right) z\right)$. Passionnant.

5. La division euclidienne demandée doit être de la forme $X^n = Q_n(X^2 - 3X + 2) + R_n$, avec R_n qui est de degré strictement inférieur à celui de P, donc de degré 1 au maximum. Posons donc $R_n = a_n X + b_n$, et évaluons l'égalité précédente lorsque $X = 1$ et $X = 2$ (valeurs qui ne sont évidemment pas choisies au hasard, ce sont les deux réels annulant le polynôme P) : $1^n = 0 + a_n + b_n$, soit $a_n + b_n = 1$; et $2^n = 0 + 2a_n + b_n$, soit $2a_n + b_n = 2^n$. En soustrayant les deux équations on obtient immédiatement $a_n = 2^n - 1$, puis on en déduit que $b_n = 2 - 2^n$. Autrement dit, $X^n = Q_n P + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$. Si on applique cette expression à l'application f (les composées jouant le rôle de puissance, on a tout à fait le droit), le fait que $P(f) = f^2 - 3f + 2\,id = 0$ simplifie les choses puisqu'on trouve $f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)\,id$. C'est exactement l'expression obtenue à la question précédente.