Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 7

PTSI B Lycée Eiffel

28 avril 2018

Exercice 1

On considère dans cet exercice les fonctions $f_n : x \mapsto e^{nx} + x - 2$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution sur $]0, +\infty[$, que l'on notera u_n. Donner la valeur de u_0.
2. On s'intéresse à la nature de la suite (u_n).
   (a) Déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$.
   (b) En déduire la monotonie de la suite (u_n), puis prouver que (u_n) converge.
   (c) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. On cherche désormais à écrire un développement asymptotique de la suite (u_n).
   (a) Justifier que $u_n = \dfrac{1}{n}\ln(2 - u_n)$.
   (b) En déduire un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.
   (c) Déterminer un développement asymptotique de u_n de la forme $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   (d) Calculer le terme suivant de ce développement asymptotique.

Exercice 2

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et on note $F = \{M \in E \mid a + 2b = 2c - d = 0\}$, où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E, donc on donnera une base. On précisera également la dimension de F.
2. On note $G = \mathrm{Vect}(I, A)$, montrer que $E = F \oplus G$.
3. Déterminer l'expression explicite de $p(M)$, où p est la projection sur G parallèlement à F. En déduire l'expression de la symétrie s par rapport à G parallèlement à F.
4. On définit désormais une application $f : E \to E$ par $f(M) = A^2M + MA - 2M$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer explicitement les coefficients de la matrice $f(M)$.
   (c) Calculer le noyau et l'image de l'application f.
   (d) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 3

On souhaite dans cet exercice étudier la fonction $f : x \mapsto (x^2-1)\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de la fonction f. Étudier la parité de f.
2. Calculer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x)$. En déduire en particulier l'équation de la tangente en $\mathcal{C}$ à l'origine, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}$ et de cette tangente au voisinage de 0.
3. Étude locale au voisinage de $+\infty$.
   (a) Calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1-X^2)\ln\left(1+\dfrac{2X}{1-X}\right)$.
   (b) En déduire un développement asymptotique de f à l'ordre $\dfrac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
   (c) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de cette asymptote.
   (d) Que se passe-t-il en $-\infty$?
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui, étudier sa dérivabilité à cet endroit.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f et l'exprimer en fonction de $g(x) = \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| - \dfrac{1}{x}$.
   On rappelle qu'une fonction de la forme $\ln|u|$ peut être immédiatement dérivée en $\dfrac{u'}{u}$ sans se préocupper du signe de $u(x)$.
6. Étudier les variations et le signe de g sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. On prouvera en particulier que g s'annule en une seule valeur α vérifiant $\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{3}{4}$. En déduire le tableau de variations complet de f.
7. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}$ (on donne $\alpha \simeq 0.65$ et $f(\alpha) \simeq -0.9$).

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = \left(2x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2}, \dfrac{x}{2} + \dfrac{5y}{4} - \dfrac{z}{4}, \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{3z}{4}\right)$.

1. Déterminer le noyau de f, que peut-on en déduire sur l'application f ?
2. Calculer $f^2(x,y,z)$. Montrer que $f^2 - 3f + 2\,id = 0$.
3. En déduire une expression de la réciproque de f.
4. On note désormais $p = f - id$ et $q = 2\,id - f$.
   (a) Montrer que p et q sont deux projecteurs.
   (b) Déterminer les noyaux et images de p et de q, et vérifier que $\ker(p) = \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Im}(p) = \ker(q)$. Expliquer pourquoi ces dernières égalités étaient évidentes sans avoir besoin de calculer les espaces vectoriels correspondants.
   (c) Déterminer $f \circ p$ et $f \circ q$ (on ne cherche pas une expression explicite).
   (d) Que valent $p \circ q$ et $q \circ p$?
   (e) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$. En déduire une expression explicite de $f^n(x,y,z)$.
5. En posant $P = X^2 - 3X + 2$, déterminer explicitement le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par P (on pourra écrire la division euclidienne théorique et choisir des valeurs intelligentes de l'indéterminée X pour trouver les coefficients du reste). En déduire une expression de f^n en fonction de f et de f^2, puis retrouver le résultat de la question précédente.