Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

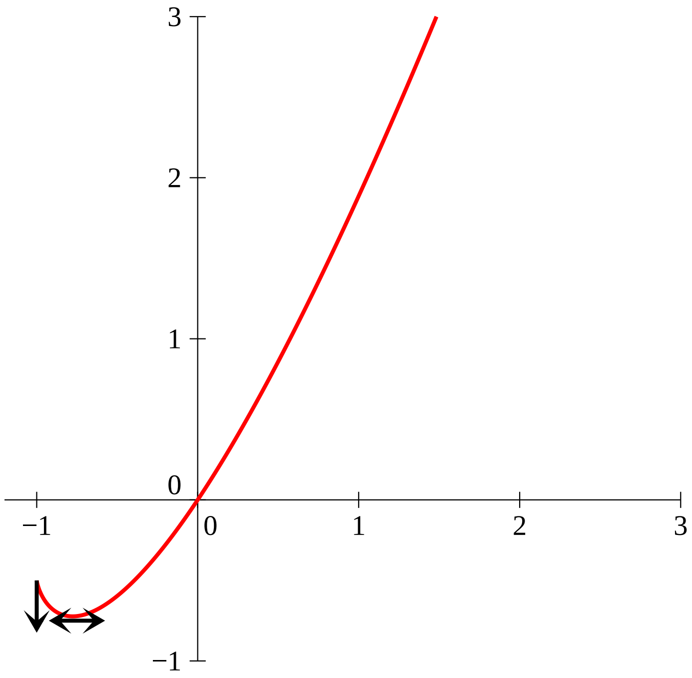
17 mars 2018

Exercice 1

1. Allons-y : $I_0 = \int_0^1 \ln(x+1)\, dx = [(x+1)\ln(x+1)-x]_0^1 = 2\ln(2)-1 \simeq 0.4$. Pour I_1, on peut par exemple faire une IPP en posant $u'(x) = x$, et par exemple $u(x) = \frac{x^2}{2}$, et $v(x) = \ln(x+1)$, ce qui donne $v'(x) = \frac{1}{x+1}$, pour obtenir $I_1 = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}\, dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}J$, où $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\, dx$. On peut constater que $\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x^2+x)-(x+1)+1}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$, donc $J = \int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}$. En découle $I_1 = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
Reste enfin I_2, pour laquelle on va aussi effectuer une IPP en posant $v(x) = \ln(x+1)$ et $v'(x) = \frac{1}{x+1}$, et $u'(x) = x^2$ qui donne par exemple $u(x) = \frac{x^3}{3}$. On trouve alors $I_2 = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}\, dx = \frac{\ln(2)}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(x^3+x^2)-x^2}{x+1}\, dx = \frac{\ln(2)}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\, dx + \frac{1}{3}J = \frac{\ln(2)}{3} - \frac{1}{9} + \frac{\ln(2)}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2\ln(2)}{3} - \frac{5}{18} \simeq 0.46 - 0.27 \simeq 0.19$ (la valeur approchée est simplement donnée pour constater la décroissance des premiers termes de la suite).
2. On procède comme d'habitude : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\, dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\, dx = \int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)\, dx$. Si $x \in [0,1]$, $x+1 \in [1,2]$, donc $\ln(x+1) \geqslant 0$. Par ailleurs, $x^n \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$. L'intégrale d'une fonction négative sur un segment étant négative, on en déduit que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, donc que $I_{n+1} \leqslant I_n$. Autrement dit, la suite (I_n) est bien décroissante.
3. La positivité de I_n découle immédiatement de la positivité de la fonction à intégrer sur $[0,1]$. De plus, $\forall x \in [0,1]$, $1+x \in [1,2]$ donc $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln(2)$, et $x^n\ln(x+1) \leqslant x^n \ln(2)$. On peut intégrer cette inégalité entre 0 et 1 : $I_n \leqslant \int_0^1 x^n \ln(2)\, dx = \ln(2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes assure que la suite (I_n) converge et que sa limite est nulle.
4. Il est plus facile ici (en partant de I_{n+1}) de faire l'IPP « dans l'autre sens » par rapport à la question 1, donc en posant $u'(x) = \ln(x+1)$, et par exemple $u(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$, et $v(x) = x^{n+1}$, donc $v'(x) = (n+1)x^n$. Celà donne $I_{n+1} = [x^{n+1}(x+1)\ln(x+1) - x^{n+2}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(x+1)\ln(x+1) - (n+1)x^{n+1}\, dx = 2\ln(2) - 1 - (n+1)\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1) + x^n\ln(x+1)\, dx + (n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = 2\ln(2) - 1 - (n+1)I_{n+1} - (n+1)I_n + \frac{n+1}{n+2}$. Autrement

dit, $(n+2)I_{n+1} = 2\ln(2) - \frac{1}{n+2} - (n+1)I_n$, et $I_{n+1} = \frac{2\ln(2)}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}I_n$. Par exemple, pour $n=1$, on retrouve $I_2 = \frac{2\ln(2)}{3} - \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \times 14$, ce qui correspond à ce qu'on avait obtenu plus haut.

5. (a) La fonction g_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ (par théorèmes généraux) sur $]-1,+\infty[$. Sa dérivée est donnée par $g_2'(x) = \ln(x+1) + 1 + \frac{1}{2} = \ln(x+1) + \frac{3}{2}$. Elle est donc positive lorsque $\ln(x+1) \geqslant -\frac{3}{2}$, soit $x \geqslant e^{-\frac{3}{2}} - 1$. Pour le tracé de la courbe, on peut remarquer que $e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$, avec $e\sqrt{e} \simeq 2.7 \times 1.5 \simeq 4$, donc $e^{-\frac{3}{2}} - 1 \simeq \frac{1}{4} - 1 \simeq -\frac{3}{4}$. On calcule la valeur du minimum de g_2 : $g_2(e^{-\frac{3}{2}} - 1) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(e^{-\frac{3}{2}} - 1) = -e^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \simeq -\frac{3}{4}$. On peut maintenant étudier les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x) = +\infty$ (aucune difficulté ici), et comme $\lim\limits_{x\to-1} (x+1)\ln(x+1) = 0$ par croissance comparée (on peut poser $X = x+1$ pour se ramener à $\lim\limits_{X\to 0} X\ln(X)$), on a $\lim\limits_{x\to-1} g_2(x) = \frac{1}{2}$. La fonction g_2 est donc prolongeable par continuité (à droite) en -1 en posant $g_2(-1) = \frac{1}{2}$. Pas besoin de s'embêter avec un taux d'accroissement pour étudier la dérivabilité en -1, il suffit de constater que $\lim\limits_{x\to-1} g_2'(x) = -\infty$ (ce qui est immédiat) pour prouver qu'il y aura une tangente verticale à la courbe en -1 (et que la fonction n'est donc pas dérivable en -1). Une allure de la courbe (on constate facilement que $g_2(0) = 0$ pour donner un point de repère supplémentaire) :



(b) La fonction f_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le même intervalle que g_2, et $f_2'(x) = 2x\ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}\left((x+1)\ln(x+1) + \frac{x}{2}\right) = \frac{2x}{x+1}g_2(x)$. Sur l'intervalle de définition, $x+1 \geqslant 0$, et x et $g_2(x)$ sont de même signe, donc f_2' est toujours positive, et la fonction f_2 est donc strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ (avec une tangente horizontale pour $x=0$ si on veut être précis). On a sans aucune difficulté $\lim\limits_{x\to-1} f_2(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$, donc on obtient le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
f_2	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2

1. La fonction h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $h'(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{-2x^2+5x-2}{x^3}$. Le signe de cette dérivée est le même que celui de son numérateur $-2x^2+5x-2$, qui admet pour discriminant $\Delta = 25-16 = 9$, et pour racines $x_1 = \dfrac{-5-3}{-4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-5+3}{-4} = \dfrac{1}{2}$. La dérivée sera positive entre ces racines. Pour compléter le tableau de variations, calculons déjà $h(2) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{2} - 2\ln(2) = -\dfrac{9}{4} - 2\ln(2)$, et $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4 - 10 + 2\ln(2) = 2\ln(2) - 6$. Aucune difficulté pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$, pour la limite en 0 il vaut mieux écrire $h(x) = \dfrac{1-5x-2x^2\ln(x)}{x^2}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$ (croissance comparée tout à fait classique), le numérateur tend vers 1 et $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$. À défaut de courbe, donnons quand même le tableau de variations de la fonction :

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
h	‖ $+\infty$	$\searrow$	$2\ln(2)-6$	$\nearrow$	$-\frac{9}{4} - 2\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, la fonction h admet un maximum de valeur $-\dfrac{9}{4} - 2\ln(2) < 0$ (puisque $2\ln(2) > 0$), donc la fonction est strictement négative et ne risque guère de s'annuler. De plus, h est bijective de $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ vers $]2\ln(2)-6, +\infty[$, intervalle qui contient la valeur 0. Léquation $h(x) = 0$ admet donc une unique solution α vérifiant $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$. Or, l'équation $h(x) = 0$ est clairement équivalente à (E), il suffit de tout multiplier par x^2 (bien entendu, x ne peut pas être nul donc on peut).

2. (a) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ par théorèmes généraux. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{4}$ (un petit coup de croissance comparée pour le $x^2\ln(x)$, comme plus haut), donc f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = \dfrac{1}{4}$. Pour la dérivabilité, on va passer par le théorème de prolongement de la dérivée, le calcul de f' va de toute façon nous resservir ensuite : $\forall x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{4} - x\ln(x) - \dfrac{x}{2}$. Encore un petit peu de croissance comparée, et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{4}$, ce qui prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{4}$. L'équation de la tangente en 0 est donc $y = f'(0)x + f(0) = \dfrac{1}{4}(1-x)$.

   (b) Là encore, on va calculer brutalement f'' (la fonction f est évidemment dérivable une deuxième fois sur $]0, +\infty[$), ça va servir à la question suivante : $f''(x) = -\ln(x) - 1 - \dfrac{1}{2} =$

$-\ln(x) - \dfrac{3}{2}$. Cette fois-ci, $\lim\limits_{x \to 0} f''(x) = +\infty$, donc la fonction f' n'est pas dérivable en 0 (et donc f n'est pas deux fois dérivable en 0).

(c) La dérivée seconde f'' s'annule en $x = e^{-\frac{3}{2}}$, qui appartient évidemment à l'intervalle $[0, 1]$. En fait, $e^{-\frac{3}{2}} \simeq \dfrac{1}{4}$, comme on l'a vu dans le premier exercice (quel sujet de devoir bien fichu, c'est incroyable). La fonction f' est croissante sur $[0, e^{-\frac{3}{2}}]$ et décroissante sur $[e^{-\frac{3}{2}}, 1]$, avec pour maximum $f'(e^{-\frac{3}{2}}) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{4}$. Il serait peut-être intéressant de connaitre le signe de ce maximum, ce qui n'est pas si évident : comme $\ln(e^{-\frac{3}{2}}) = -\dfrac{3}{2} < \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = -2\ln(2)$ (on sait bien que $\ln(2)$ est légèrement inférieur à 0.7, donc $2\ln(2)$ est supérieur à -1.4, ça se joue tout de même à pas grand chose), la croissance de la fonction ln assure que $e^{-\frac{3}{2}} < \dfrac{1}{4}$, donc le maximum de notre fonction f' est strictement négatif, et f sera du coup strictement décroissante sur $[0, 1]$. Pour compléter le tableau que nous n'allons pas manque de faire, calculons $f'(1) = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{4}$, ainsi que $f(1) = 0$. Pour conclure (on a prolongé les deux fonctions en 0) :

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		1
f'	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	< 0	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$
f	$\frac{1}{4}$	$\searrow$		$\searrow$	0

La fonction f étant bijective de $[0, 1]$ vers $\left[0, \dfrac{1}{4}\right] \subset [0, 1]$, l'intervalle est bien stable. De plus, sa dérivée est toujours négative et minorée par $-\dfrac{1}{4}$ sur $[0, e^{-\frac{3}{2}}]$, et par $-\dfrac{3}{4}$ sur $[e^{-\frac{3}{2}}, 1]$, ce qui prouve que, $\forall x \in [0, 1]$, $-\dfrac{3}{4} \leqslant f'(x) < 0$, donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{3}{4}$.

3. (a) Il s'agit bien sûr d'appliquer l'IAF sur l'intervalle $[0, 1]$. La fonction f y est dérivable, de dérivée majorée en valeur absolue par $\dfrac{3}{4}$. De plus, $\alpha \in [0, 1]$ (on a même prouvé mieux plus haut), et $1 - 5\alpha = 2\alpha^2 \ln(\alpha) \Leftrightarrow 4\alpha = 1 - \alpha - 2\alpha^2 \ln(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$. Enfin, $f(u_n) = u_{n+1}$ (par définition) et surtout, par récurrence triviale, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$ (c'est vrai pour $u_0 = \dfrac{1}{5}$, et, l'intervalle étant stable par f, $u_n \in [0, 1] \Rightarrow u_{n+1} \in [0, 1]$). On peut donc appliquer l'IAF entre $x = u_n$ et $y = \alpha$ pour obtenir $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{3}{4}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{3}{4}|u_n - \alpha|$.

(b) Commençons par prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. C'est vrai au rang 0 puisque $|u_0 - \alpha| = \left|\dfrac{1}{5} - \alpha\right| < 1$ (on sait que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$, donc l'écart avec u_0 est même nettement plus petit). Supposons l'inégalité vraie au rang n, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{3}{4}|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$ en exploitant la question précédente et l'hypothèse de récurrence. Comme par ailleurs $|u_n - \alpha| \geqslant 0$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, c'est-à-dire que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

(c) Vu la majoration démontrée à la question précédente, il suffit que $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 10^{-2}$, soit $\left(\frac{4}{3}\right)^n \geqslant 100$, ou encore $n\ln\left(\frac{4}{3}\right) \geqslant \ln(100)$, donc $n_0 = Ent\left(\frac{\ln(100)}{2\ln(2)-\ln(3)}\right)+1$ convient. Si on veut du plus concret, $2\ln(2)-\ln(3) \simeq 0.3$, et $\ln(100) = 2\ln(10) = 2\ln(2)+2\ln(5) \simeq 1.4+3.2 \simeq 4.6$, donc $n = 17$ devrait convenir (oui, je sais, on ne pouvait pas vraiment faire ce calcul à la main).

Exercice 3

1. Calculons bêtement $P_1 = 2X \times 1 - (1+X^2)\times 0 = 2X$, puis $P_2 = 2X \times 2X - \frac{1}{2}(1+X^2)\times 2 = 4X^2 - 1 - X^2 = 3X^2-1$.
2. Montrons par récurrence les deux propriétés d'un coup. Elles sont vraies au rang 0 (on a bien $a_1 = 2 = \frac{2}{1}\times a_0$). Supposons-les vraies au rang n, le terme dominant de P_n est donc a_nX^n, et celui de P_n' sera na_nX^{n-1}. Le terme dominant de plus haut degré théorique (s'il ne s'annule pas) de P_{n+1} est alors $2X\times a_nX^n - \frac{1}{n+1}X^2 \times na_nX^{n-1} = \left(2-\frac{n}{n+1}\right)a_nX^{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_nX^{n+1}$. Le coefficient n'étant pas nul (puisque $a_n \neq 0$ par hypothèse de récurrence), notre polynôme est bien de degré n, et on a prouvé en passant la relation $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. On en déduit que $a_n = n+1$, ce qu'on prouve par récurrence si on est sérieux : $a_0 = 1$ c'est bon, et si $a_n = n+1$, alors $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}\times(n+1) = n+2$, ce qui prouve l'hérédité.
3. Et si on faisait une petite récurrence ? Au rang 0, on a bien $P_0(-X) = P_0(X)$ puisque le polynôme est constant. Si on suppose que $P_n(-X) = (-1)^nP_n(X)$, alors $P_n'(-X) = (-1)^{n+1}P_n'(X)$, et $P_{n+1}(-X) = -2XP_n(-X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'(-X) = (-1)^{n+1}\times 2XP_n(X) - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}(1+X^2)P_n'(X) = (-1)^{n+1}P_{n+1}(X)$, ce qu'on voulait prouver. Les polynômes P_n ont donc une parité qui est celle de l'entier n.
4. (a) Oh ben tiens, une idée originale, je propose de faire une récurrence ! Au rang 1, $P'1 = 2 = 2P_0$ donc la propriété est vraie (techniquement, on peut même initialiser pour $n = 0$). Supposons donc que $P_n' = (n+1)P_{n-1}$, ce qui implique que $P_{n+1} = 2XP_n - (1+X^2)P_{n-1}$. Dérivons donc cette égalité : $P_{n+1}' = 2P_n + 2XP_n' - 2XP_{n-1} - (1+X^2)P_{n-1}'$. On remplace à nouveau le terme en P_n' (en utilisant l'hypothèse de récurrence) pour obtenir $P_{n+1}' = 2P_n + 2(n+1)XP_{n-1} - 2XP_{n-1} - (1+X^2)P_{n-1}' = 2P_n + 2nXP_{n-1} - (1+X^2)P_{n-1}'$. Or, en décalant la relation de récurrence définissant la suite, on a $P_n = 2XP_{n-1} - \frac{1}{n}(1+X^2)P_{n-1}'$. Quitte à multiplier par n, on a donc $2nXP_{n-1} - (1+X^2)P_{n-1}' = nP_n$, et $P_{n+1}' = 2P_n + nP_n = (n+2)P_n$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence.

   (b) En remplaçant X par 0 dans la récurrence définissant la suite, on a $P_{n+1}(0) = -\frac{1}{n+1}P_n'(0) = -P_{n-1}(0)$ puisque $P_n' = (n+1)P_{n-1}$. Comme $P_1(0) = 0$, une récurrence immédiate permet de prouver que, pour tout entier $n = 2p+1$ impair, on a $P_{2p+1}(0) = 0$. Par contre, comme $P_0(0) = 1$, on aura $P_{2p}(0) = (-1)^p$ (là encore, une récurrence facile si on veut être rigoureux : $P_0(0) = 1$ comme on vient de le dire, et $P_{2p}(0) = (-1)^p \Rightarrow P_{2(p+1)}(0) = P_{2p+2}(0) = -P_{2p}(0) = (-1)^{p+1}$).

   (c) C'est immédiat : d'après la question a, $P_{n+1}' = (n+2)P_n$, donc $(n+2)\int_0^x P_n(t)\,dt = \int_0^x P_{n+1}'(t)\,dt = P_{n+1}(x) - P_{n+1}(0)$.

(d) On sait que $P_3(0) = 0$, donc $P_3(x) = 4\int_0^x P_2(t)\,dt = 4\int_0^x 3t^2 - 1\,dt = 4[t^3 - t]_0^x = 4x^3 - 4x$. De même, on sait que $P_4(0) = 1$, donc $P_4(x) = 1 + 5\int_0^x P_4(t)\,dt = 1 + 5\int_0^x 4t^3 - 4t\,dt = 1 + 5[t^4 - 2t^2]_0^x = 5x^4 - 10x^2 + 1$.

5. (a) Par définition, $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - \frac{1}{n+2}(1+X^2)P'_{n+1}$. Or, on sait que $\frac{1}{n+2}P'_{n+1} = P_n$ (question 4a), donc $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - (1+X^2)P_n$, ce qui est bien la relation demandée.

   (b) À x fixé, la suite $(P_n(x))$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'après la question précédente. L'équation caractéristique correspondante (dont on notera la variable a pour éviter les confusions) est $a^2 - 2ax + (1 + x^2) = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4x^2 - 4(1 + x^2) = -4$, qui est évidemment strictement négatif. Les racines de l'équation sont $a_1 = \frac{2x+2i}{2} = x + i$, et $a_2 = \frac{2x-2i}{2} = x - i$. Comme le module et l'argument de ces nombres complexes vont être impossibles à exprimer simplement, on va se contenter de l'expression complexe (vu ce qui nous est demandé à la question suivante, c'est de toute façon très bien). On en déduit donc qu'il existe deux constantes (complexes) A et B telles que $P_n(x) = A(x+i)^n + B(x-i)^n$. Les conditions initiales donnent $P_0(x) = 1 = A + B$ et $P_1(x) = 2x = (x+i)A + (x-i)B$. Comme $B = 1 - A$, on a donc $2x = (x+i)A + x - i - (x-i)A$, soit $x + i = 2iA$ et donc $A = \frac{x+i}{2i}$. On en déduit $B = 1 - A = \frac{i-x}{2i}$, soit $P_n(x) = \frac{(x+i)^{n+1}}{2i} - \frac{(x-i)^{n+1}}{2i}$.

   (c) Ah ben oui ça ne va pas être difficile ! D'après la question précédente, P_n coïncide avec le polynôme $\frac{1}{2i}((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1})$ sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble infini, donc les deux polynômes sont égaux (c'est le principe d'identification des coefficients si on veut faire savant).

6. Le nombre i ne pouvant pas être racine de P_n (puisque $P_n(i) = (2i)^n \neq 0$), x est racine de P_n si et seulement si $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{n+1} = 1$. En posant $z = \frac{x+i}{x-i}$, z est donc une racine $(n+1)$-ème de l'unité, et $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$, avec $k \in \{0, \dots, n\}$. Si $z = \frac{x+i}{x-i}$, alors $zx - iz = x + i$, donc $x(z-1) = i(z+1)$, et $x = \frac{i(z+1)}{z-1}$, à condition bien entendu que $z \neq 1$. On supprime donc la valeur de z obtenue précédemment lorsque $k = 0$, et on trouve n valeurs pour x, égales à $x_k = \frac{i(e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} + 1)}{e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} - 1}$. On a bien évidemment très envie de factoriser en haut et en bas par l'angle moitié : $x_k = \frac{ie^{\frac{ik\pi}{n+1}}(e^{i\frac{k\pi}{n+1}} + e^{i\frac{-k\pi}{n+1}})}{e^{i\frac{k\pi}{n+1}}(e^{i\frac{k\pi}{n+1}} + e^{i\frac{-k\pi}{n+1}})} = \frac{2i\cos(\frac{k\pi}{n+1})}{2i\sin(\frac{k\pi}{n+1})} = \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})}$ (attention tout de même, si $n+1$ est pair, on ne peut pas écrire la solution correspondant à $k = \frac{n+1}{2}$, qui vaut tout bêtement 0, sous forme d'une inverse de tangente). Ces valeurs sont toutes distinctes (les angles dont on prend les tangentes appartiennent tous à $]0, \pi[$, intervalle sur lequel la fonction tan est injective), donc on a obtenu n racines distcinctes (et réelles !) du polynôme P_n. Comme celui-ci est de degré n, on les a toutes. Il ne faut pas oublier que le polynôme P_n a un coefficient dominant égal à $n+1$ avant d'écrire la factorisation : $P_n = (n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})}\right)$ dans le cas où n est un entier pair (puisqu'alors $n+1$ est impair), et $P_n = (n+1)X\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X - \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})}\right)\prod_{k=\frac{n+3}{2}}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})}\right)$ quand n est impair (si on tient vraiment à faire apparaitre les tangentes).

7. Les relations coefficients-racines nous assurent que la somme des racines de P_n est égale à $-\frac{b_{n-1}}{a_n}$, où $a_n = n+1$ est le coefficient dominant de P_n calculé plus haut, et b_{n-1} est le coefficient de degré $n-1$ du même polynôme P_n. En reprenant l'expression explicite de P_n et en développant brutalement à coups de binôme de Newton, on a $b_{n-1} = \frac{1}{2i}\left(\binom{n+1}{n-1}i^2 - \binom{n+1}{n-1}(-i)^2\right) = 0$. En fait, il n'y a rien de surprenant là-dedans, on peut remarquer à l'aide de l'expression explicite des racines qu'elles sont opposées deux à deux (sauf la racine nulle dans le cas où n est impair). On peut aussi utiliser le fait que P_n est pair ou impair, ce qui assure que, si α est racine réelle de P_n, alors $-\alpha$ aussi. Comme le polynôme n'a que des racines réelles simples, cela assure que leur somme est nulle.

   Pour le produit, les relations coefficients-racines nous assurent qu'il est égal à $\frac{(-1)^n b_0}{n+1}$, où b_0 est le coefficient constant de P_n. Or, ce coefficient constant est égal à $P_n(0)$. Lorsque n est impair, le produit est donc nul, ce qui n'a rien de surprenant puisque dans ce cas 0 est effectivement racine du polynôme P_n ! Lorsque n est pair, $(-1)^n = 1$, et on a donc un produit des racines égal à $\frac{(-1)^p}{2p+1}$, en ayant posé $n = 2p$.

Exercice 4

1. C'est une conséquence des formules d'additions trigonométriques (ou même plus rapidement des formules de transformation somme-produit) : $\cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = 2\cos(x)\cos(y)$.

2. Calculons plutôt le membre de droite : $\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \mathrm{ch}(x+y)$. En utilisant la parité des fonctions ch et sh, on en déduit que $\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}(x + (-y)) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$, et on termine comme à la question 1, en additionant les deux formules pour éliminer les produits de sh.

3. C'est complètement trivial, il suffit d'appliquer la formule initiale à kx et ky (elle doit de toute façon être vraie pour tout couple de réels), en constatant que $k(x+y) = kx + ky$.

4. En remplaçant x et y par 0 dans la relation, on a $f(0) + f(0) = 2f(0)f(0)$, donc $f(0) = f(0)^2$, ce qui implique $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, en remplaçant uniquement y par 0 dans la relation, on trouve $2f(x) = 0$, la fonction f est donc la fonction nulle. Si $f(0) = 1$, en remplaçant cette fois x par 0 dans la relation, on a $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, soit $f(-y) = -f(y)$, ce qui prouve bien que f est paire.

5. (a) Il suffit d'appliquer le changement de variable $u = y + x$ (x étant ici considéré comme une constante), on aura $du = dy$ et les bornes deviennent x (lorsque $y = 0$) et $x + r$ (lorsque $y = r$), ce qui donne immédiatement la formule demandée.

   (b) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on a certainement le droit d'intégrer la relation de départ par rapport à y (encore une fois, x sera ici constant) sur l'intervalle $[0, r]$. On trouve alors $\int_0^r f(x+y) + f(x-y)\, dy = 2\int_0^r f(x)f(y)\, dy$. On peut évidemment séparer l'intégrale de gauche en deux parties, et le changement de variables $v = x - y$ donne $\int_0^r f(x-y)\, dy = \int_x^{x-r} -f(v)\, dv = \int_{x-r}^x f(v)\, dv$ (puisque $dv = -dy$ ici). À droite, il suffit de sortir la constante $f(x)$ de l'intégrale et on obtient la formule souhaitée.

   (c) On a supposé que $f(0) = 1$. La fonction f étant continue en 0, la définition de la limite nous assure alors, en prenant par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$, qu'il existe un réel $r > 0$ tel que,

$\forall y \in [0,r]$, $|f(y)-f(0)| < \dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{1}{2} < f(y) < \dfrac{3}{2}$. Si on intègre l'inégalité de gauche entre 0 et r, on a $\displaystyle\int_0^r f(y)\,dy > \int_0^r \frac{1}{2}\,dy = \frac{r}{2} > 0$.

(d) En fixant un r convenable, notons $a = \displaystyle\int_0^r f(y)\,dy > 0$. Notons également F une primitive quelconque de f sur $\mathbb{R}$ (il en existe puisque f est continue sur $\mathbb{R}$). On peut alors réécrire la relation de la question b sous la forme $2af(x) = F(x+r)-F(x)+F(x)-F(x-r)$, soit $f(x) = \dfrac{F(x+r)-F(x-r)}{2a}$. La fonction F étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (c'est une primitive d'une fonction continue), le membre de droite de notre équation est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc f également.

(e) Maintenant qu'on sait que f est dérivable, dérivons notre relation (sous la dernière forme obtenue) : $f'(x) = \dfrac{f(x+r)-f(x-r)}{2a}$. C'est ce qui est demandé, en posant $c = 2a = 2\displaystyle\int_0^r f(y)\,dy$.

(f) La relation de la question précédente prouve que f est deux fois dérivable (puisque le membre de droite est dérivable, f' l'est aussi), dérivons à nouveau : $cf''(x) = f'(x+r)-f'(x-r)$. Or, $cf'(x+r) = f(x+2r)-f(x)$ et $cf'(x-r) = f(x)-f(x-2r)$, donc $c^2f''(x) = cf'(x+r)-cf'(x-r) = f(x+2r)+f(x-2r)-2f(x)$. Il est temps de revenir à la relation donnée tout au début de l'exercice et de l'appliquer avec $y = 2r$: $f(x+2r)+f(x-2r) = 2f(x)f(r)$, donc $c^2f''(x) = 2f(x)(f(r)-1)$. En posant $\lambda = \dfrac{2(f(r)-1)}{c^2}$ (tout celà est constant une fois r fixé), on a bien l'équation différentielle souhaitée.

(g) Distinguons trois cas selon la valeur de λ :
- si $\lambda = 0$, on a $f''(x) = 0$, donc f est une fonction affine. Mais les seules fonctions affines paires sont les fonctions constantes, donc f est la fonction constante égale à 1 (puisque $f(0) = 1$ par hypothèse), qui est bien solution du problème posé.
- si $\lambda > 0$, en posant $\lambda = \omega^2$, on a $f'' - \omega^2 f = 0$, donc $f(x) = A\,\mathrm{ch}(\omega x) + B\,\mathrm{sh}(\omega x)$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ (révisez votre cours sur les équations différentielles si ça ne vous semble pas clair). La fonction étant paire (et ch aussi), on doit avoir $B = 0$ (sinon, par exemple, $f(1) = A\,\mathrm{ch}(\omega) + B\,\mathrm{sh}(\omega)$ et $f(-1) = A\,\mathrm{ch}(\omega) - B\,\mathrm{sh}(\omega)$ ne sont pas égaux). De plus, $f(1) = 0$ impose $A = 1$ (puisque $\mathrm{ch}(0) = 1$), donc $f(x) = \mathrm{ch}(\omega x)$, qui est effectivement solution du problème (questions 2 et 3).
- si $\lambda > 0$, en posant $\lambda = -\omega^2$, on a $f'' + \omega^2 f = 0$, donc $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Comme ci-dessus, on prouve que $B = 0$ et $A = 1$, donc $f(x) = \cos(\omega x)$, qui est bien solution du problème.

Les solutions sont donc les fonction constantes égales à 0 et 1, et toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x)$ ou $x \mapsto \cos(\omega x)$, avec $\omega \in \mathbb{R}$.