Devoir Surveillé n° 6

PTSI B Lycée Eiffel

17 mars 2018

Exercice 1

On pose, pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$.

1. Calculer les valeurs de I_0 , I_1 et I_2 .

2. Étudier la monotonie de la suite (I_n) .

3. Montrer l'encadrement $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$.

En déduire la convergence et la limite de la suite (I_n) .

4. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .

5. On cherche dans cette question à étudier la fonction $f_2 : x \mapsto x^2 \ln(x+1)$.

(a) Étudier le plus complètement possible la fonction $g_2 : x \mapsto (x+1) \ln(x+1) + \frac{x}{2}$ (on tracera en particulier une allure de sa courbe représentative).

(b) En exprimant $f_2'(x)$ à l'aide de la fonction g_2 , dresser le tableau de variations complet de la fonction f_2 .

Exercice 2

On considère dans cet exercice l'équation $(E) : 1 - 5x = 2x^2 \ln(x)$.

1. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x} - 2 \ln(x)$. Effectuer une étude complète de la fonction h (la courbe n'est pas demandée), et en déduire que l'équation (E) admet une solution unique α , dont on justifiera l'appartenance à l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$.

2. On définit désormais une fonction f par $f(x) = \frac{1-x-2x^2 \ln(x)}{4}$.

(a) Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$. On précisera l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f .

(b) La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

(c) Étudier les variations de f' et de f sur $[0, 1]$, et prouver que cet intervalle est stable par f et que, $\forall x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

3. On définit maintenant une suite (u_n) par $u_0 = \frac{1}{5}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Justifier rigoureusement que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$.

(b) En déduire la convergence de la suite (u_n) .

(c) Pour quelle valeur de n la valeur de u_n est-elle une valeur approchée de sa limite à 10^{-2} près ?

Exercice 3

On considère la suite de polynômes (P_n) définie par $P_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = 2XP_n - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'.$$

1. Calculer P_1 et P_2 .
2. On note a_n le coefficient dominant de P_n . Montrer par récurrence que $d^\circ(P_n) = n$ et que $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire la valeur de a_n .
3. Montrer que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$. Que peut-on dire de la parité du polynôme P_n ?
4. On cherche dans cette question une expression intégrale de P_{n+1} .
 - (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}' = (n+2)P_n$.
 - (b) Calculer $P_n(0)$ (on pourra distinguer deux cas suivant la parité de n).
 - (c) En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2) \int_0^x P_n(t) dt$.
 - (d) Calculer à l'aide des questions précédentes P_3 et P_4 .
5. On cherche désormais une expression explicite du polynôme P_n .
 - (a) Montrer que $P_{n+2} - 2XP_{n+1} + (1+X^2)P_n = 0$.
 - (b) Pour un réel x fixé, exprimer $P_n(x)$ en fonction de x et de n en utilisant la question précédente (et vos connaissances sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2).
 - (c) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = \frac{1}{2i}((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1})$.
6. Déterminer les racines du polynôme P_n et sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
7. Calculer la somme et le produit des racines de P_n .

Exercice 4

On cherche dans cet exercice à déterminer toutes les fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$ telles que, $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

1. Vérifier que la fonction cos est une solution de ce problème.
2. Montrer que, $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)$. En déduire que la fonction ch est également solution du problème.
3. Montrer que, si f est solution, alors la fonction $f_k : x \mapsto f(kx)$ est aussi solution pour tout réel k .
4. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$? Que peut-on dire de f si $f(0) = 0$? Montrer que, si $f(0) = 1$, alors f est paire.
5. On suppose désormais que $f(0) = 1$.

(a) Montrer que, si $r > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^r f(x+y) dy = \int_x^{x+r} f(u) du$.

(b) Avec les mêmes hypothèses, montrer que $2f(x) \int_0^r f(y) dy = \int_x^{x+r} f(u) du + \int_{x-r}^x f(v) dv$.

(c) Expliquer le plus rigoureusement possible pourquoi on peut choisir r tel que

$$\int_0^r f(y) dy > 0.$$

(d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Prouver l'existence d'une constante $c > 0$ telle que $cf'(x) = f(x+r) - f(x-r)$.

(f) En déduire que f est solution d'une équation différentielle de la forme $f''(x) = \lambda f(x)$.

(g) Conclure.