Devoir Surveillé n°4

PTSI B Lycée Eiffel

8 janvier 2018

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Résoudre en fonction de la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & mz & = & 2 \\ 2x & + & my & + & 2z & = & 3 \end{array} \right.$$

On détaillera bien entendu les calculs, et on précisera le plus correctement possible les ensembles de solutions en fonction des valeurs de m.

Exercice 2

La méthode de Newton sert à déterminer des valeurs approchées de solutions d'équations de la forme $f(x) = 0$, où f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I (et ayant des signes opposés aux extrémités de I, pour assurer que l'équation admet bien une solution sur I). Pour cela, on construit une suite (x_n) de la façon suivante : $x_0 \in I$, et pour tout entier naturel n, le réel x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses (Ox) et de la tangente en x_n à la courbe de la fonction f.

1. Faire un dessin illustrant la construction des premiers termes de la suite (x_n) (on prendra une allure de type parabolique pour la courbe de f).
2. Montrer que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
3. Pour la suite de l'exercice, on pose $f(x) = x^2 - a$, où $a > 1$; $I =]0, +\infty[$; et $x_0 = a$.
   (a) Vérifier que, dans ce cas, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + a}{2x_n}$.
   (b) Étudier la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2 + a}{2x}$ et la fonction $h : x \mapsto g(x) - x$ sur l'intervalle I.
   (c) En déduire que la suite (x_n) est décroissante et minorée, puis qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.
4. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}$.
   (a) Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$.
   (b) En déduire que $|x_n - \sqrt{a}| \leq 2x_0(v_n)^{2^n}$.
5. On suppose désormais $a = 2$.
   (a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (x_n).
   (b) Montrer que $|x_n - \sqrt{2}| \leq \dfrac{4}{3^{(2^n)}}$.
   (c) À partir de quelle valeur de n est-on sûr que x_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près ?

Exercice 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par les conditions suivantes : $u_0 = v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, on pose $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$.

1. Calculer les cinq premiers termes de chaque suite, ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-2} près de $\dfrac{v_4}{u_4}$.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont des suites d'entiers naturels.
3. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n, puis en déduire une expression explicite de u_n en fonction de n (cette expression n'est absolument pas utile pour la suite de l'exercice).
4. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $2u_n^2 - v_n^2 = (-1)^n$.
5. Montrer que, si $n \geq 1$, $v_n > u_n$, puis $\dfrac{v_n}{u_n} + \sqrt{2} \leq 2$.
6. En déduire que $\left|\dfrac{v_n}{u_n} - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{1}{2u_n^2}$, puis en déduire la limite du quotient $\dfrac{v_n}{u_n}$ quand n tend vers $+\infty$.
7. Justifier que $u_n \geq 2^n$, en déduire comment obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près.

Exercice 4

On pose pour tout cet exercice $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On souhaite calculer les puissances de la matrice M par différentes méthodes. Les différentes questions de l'exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Première méthode : par récurrence.
   (a) Calculer M^2 et déterminer deux réels α et β tels que $M^2 = \alpha M + \beta I$.
   (b) Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n M + b_n I$, et préciser les valeurs de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de celles de a_n et de b_n.
   (c) Montrer que a_n et b_n vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2, et calculer a_n en fonction de n.
   (d) En déduire une expression de M^n (inutile d'écrire explicitement la matrice).
2. Deuxième méthode : binôme de Newton.
   (a) On pose $A = M - I$, exprimer A^2 en fonction de A.
   (b) En déduire M^n en appliquant la formule du binôme de Newton.
   (c) Comparer le résultat obtenu à celui de la question 1.*d*.
3. Troisième méthode : diagonalisation.
   (a) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Calculer $P^{-1}MP$ (et obtenez de préférence une matrice diagonale).
   (c) Exprimer M^n en fonction de P, P^{-1} et D^n (on n'effectuera pas le calcul).
4. Méthode 4 : par un calcul presque direct.
   (a) Montrer qu'il existe une suite (u_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \begin{pmatrix} 5+4u_n & -4-4u_n & -1-u_n \\ u_n+1 & -u_n & -1-u_n \\ 0 & 0 & 3u_n+4 \end{pmatrix}$.
   On précisera la valeur de u_0, et une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
   (b) Calculer u_n en fonction de n, et en déduire M^n.
5. Complément : des histoires d'inverses.
   (a) La matrice M est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
   (b) Les formules obtenues pour M^n peuvent-elle s'adapter pour être valables lorsque $n = -1$?