

Devoir Surveillé n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

2 décembre 2017

Exercice 1

1. Le plus simple est de commencer par appliquer une formule de duplication : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, pour en déduire que $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$. On remplace dans l'intégrale à calculer, qu'on notera I : $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x + x \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} J = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} J$. Pour le deuxième morceau, on recourt à une IPP tout à fait classique en posant $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \cos(2x)$, donc par exemple $v(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$, pour trouver $J = \left[\frac{1}{2} x \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, dx = 0 + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$. On en déduit que $I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$.
2. On a une expression de la forme $f(z) = az + b$, avec $a = i$ qui est manifestement de module 1, donc f est une isométrie directe, autrement dit une rotation (puisque'il ne s'agit pas d'une translation). Comme $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, il s'agit d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, et il ne reste plus qu'à déterminer son centre en résolvant l'équation $f(z) = z \Leftrightarrow iz + 2 + 2i = z \Leftrightarrow z = \frac{2 + 2i}{1 - i} = \frac{(2 + 2i)(1 + i)}{2} = (1 + i)^2 = 2i$. L'application f est donc une rotation de centre $A(2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3. C'est une équation du second ordre à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$. Cette équation a pour solution évidente $r_1 = 1$ et pour deuxième solution $r_2 = 2$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^x + Be^{2x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Reste à trouver une solution particulière de notre équation, que nous chercherons de la forme $y_p(x) = (ax + b)e^x$, car 1 est racine de l'équation caractéristique. On calcule donc $y_p'(x) = (ax + b + a)e^x$, puis $y_p''(x) = (ax + 2a + b)e^x$, et on en déduit que y_p est solution de l'équation complète (en factorisant tout par e^x) si et seulement si $ax + 2a + b - 3ax - 3a - 3b + 2ax + 2b = 1$, soit $-a = 1$. On peut prendre $b = 0$, la fonction $x \mapsto -xe^x$ est solution particulière, et toutes les solutions de notre équation sont de la forme $y : x \mapsto (A - x)e^x + Be^{2x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
4. (a) Cherchons donc ces racines sous la forme $r = c + id$, on calcule $r^2 = c^2 - d^2 + 2icd$, et on a donc $r^2 = a$ si $c^2 - d^2 = -3$ et $2cd = -4$. On y ajoute l'équation sur les modules : $|r|^2 = c^2 + d^2 = |a| = \sqrt{9 + 16} = 5$. En additionnant les deux équations extrêmes, $2c^2 = 2$, donc $c = \pm 1$, et en les soustrayant, $2d^2 = 8$ donc $d = \pm 2$. La condition sur les signes déduite de la deuxième équation impose ensuite $r = 1 - 2i$, ou $r = -1 + 2i$.
(b) Un nombre réel x est solution de l'équation $P(x) = 0$ si et seulement si parties réelle et imaginaire de $P(x)$ s'annulent, donc si $x^3 - x^2 - 3x + 6 = x + 2 = 0$. Seul le réel $x = -2$ vérifie la deuxième condition. Comme $(-2)^3 - (-2)^2 - 3(-2) + 6 = -8 - 4 + 6 + 6 = 0$, il est bien solution de la première équation également, et vérifie donc $P(x) = 0$.

- (c) On peut factoriser le polynôme P sous la forme $P = (z + 2)(az^2 + bz + c) = az^3 + (2a + b)z^2 + (2b + c)z + 2c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a = 1$; $2a + b = -1$, donc $b = -3$; $2b + c = i - 3$, donc $c = i + 3$; et $2c = 6 + 2i$ qui est bien vérifié. Le second facteur obtenu, $z^2 - 3z + i + 3$, a pour discriminant $\Delta = 9 - 4(i + 3) = -3 - 4i$, c'est-à-dire le nombre a dont on a calculé les racines carrées plus haut. On peut donc directement calculer ses racines $z_1 = \frac{3 + 1 - 2i}{2} = 2 - i$ et $z_2 = \frac{3 - 1 + 2i}{2} = 1 + i$. Finalement les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont données par $\mathcal{S} = \{-2, 1 + i, 2 - i\}$.
5. Puisqu'on nous le demande si gentiment, on va poser $t = \arctan(x)$ (et donc $x = \tan(t)$), donc $dt = \frac{1}{1+x^2} dx$ (ça tombien, cette expression est déjà présente dans l'intégrale). Les bornes deviennent $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, et l'intégrale est égale à $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

Exercice 2

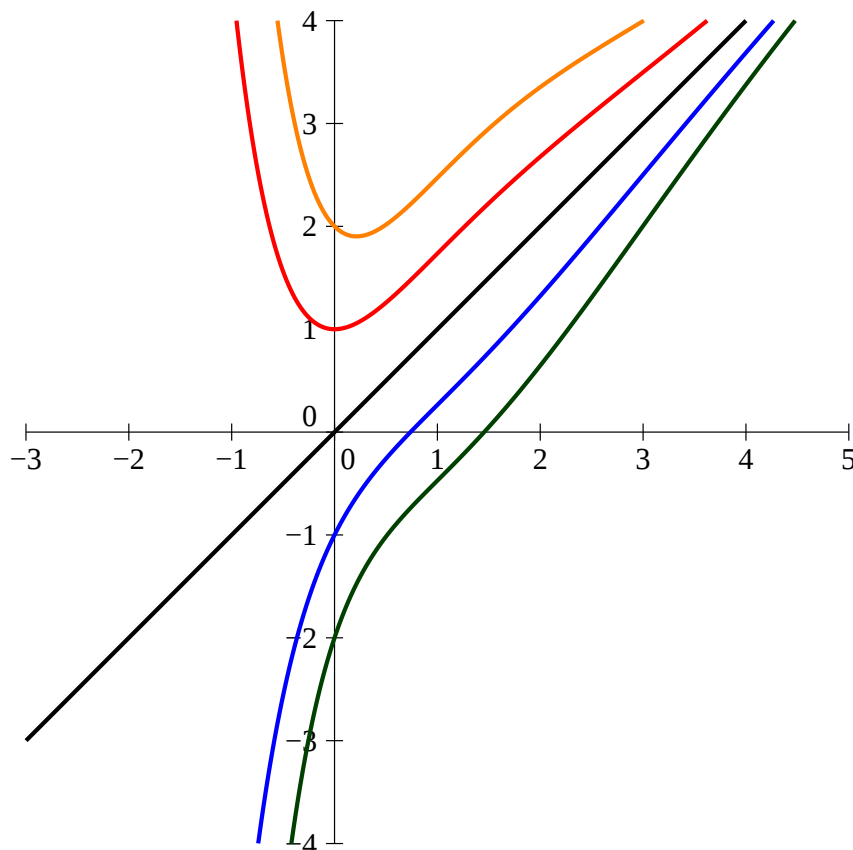
- Posons donc $y_p(x) = ax + b$, et donc $y'_p(x) = a$, et remplaçons dans l'équation : $(1 + x^2)a + (x - 1)^2(ax + b) = a + ax^2 + (x^2 - 2x + 1)(ax + b) = ax^3 + (a - 2a + b)x^2 + (a - 2b)x + a + b$. Par identification avec le second membre, on doit avoir $a = 1$, $b - a = -1$ donc $b = 0$, et les deux dernières conditions sont alors vérifiées. Autrement dit, $y_p(x) = x$ constitue une solution particulière de l'équation.
- Puisque $1 + x^2$ ne s'annule jamais, on peut normaliser sur $\mathbb{R}$ et obtenir pour équation homogène associée l'équation $y' + \frac{(x-1)^2}{1+x^2}y = 0$. Reste à trouver une primitive de $\frac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2} = 1 - \frac{2x}{1 + x^2}$. C'est en fait facile, $x - \ln(1 + x^2)$ convient. Les solutions de notre équation homogène sont donc de la forme $y_h : x \mapsto K e^{-x + \ln(1+x^2)} = \frac{K(1+x^2)}{e^x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On en déduit les solutions de l'équation complète : $y_K(x) = x + \frac{K(1+x^2)}{e^x}$.
- Calculons donc $y'_K(x) = 1 + \frac{2Kxe^x - K(1+x^2)e^x}{e^{2x}} = 1 + \frac{K(2x - 1 - x^2)}{e^x} = 1 - \frac{K(x-1)^2}{e^x}$. En particulier, on a $y'_K(1) = 1$ quelle que soit la valeur de K , ce qui prouve que toutes les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_K$ en leur point d'abscisse 1 sont parallèles.
- Il suffit de dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K(1+x^2)}{e^x} = 0$ (croissance comparée classique) pour en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_K(x) - x = 0$, et donc que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à toutes les courbes $\mathcal{C}_K$ en $+\infty$. Pour la position relative, il faut connaître le signe de $\frac{K(1+x^2)}{e^x}$, qui est toujours du signe de K . Les courbes sont donc au-dessus de l'asymptote lorsque $K > 0$, et toujours en-dessous lorsque $K < 0$.
- Question qui n'a été comprise par personne : il suffit de reprendre l'équation différentielle d'origine et d'imposer la condition $y'(x) = 0$ (ce qui correspond à la présence de l'asymptote horizontale) pour en déduire qu'on a alors $(x-1)^2 y(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, soit $y(x) = \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$. Tous les points à tangente horizontale sont donc situés sur la courbe de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$ (ça n'a à peu près aucun intérêt).
- La fonction g est bien entendu définie (et continue, dérivable et tout ce qu'on veut) sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Sa dérivée vaut $g'(x) = \frac{e^x(x-1)^2 - 2(x-1)e^x}{(x-1)^4} = \frac{e^x(x-3)}{(x-1)^3}$. De plus, la fonction

g est toujours positive, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ (aucune forme indéterminée ici), $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ (toujours pas de forme indéterminée, le dénominateur tend vers 0 et il est toujours positif), et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (par croissance comparée, on factorise le dénominateur par x^2 si on veut bien faire les choses). Dressons un joli tableau de variations, après avoir calculé $g(3) = \frac{e^3}{4}$ (notons en passant que $\frac{e^3}{4} \simeq 5$) :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
f	0	$+\infty$	$\frac{e^3}{4}$	$+\infty$

L'énoncé n'ayant pas demandé de courbe, on n'en fera pas pour une fois.

7. Vu le calcul de dérivée effectuée plus haut, y_K s'annule en x si $\frac{K(x-1)^2}{e^x} = 1$, soit $K = \frac{e^x}{(x-1)^2}$. Le nombre de points à tangente horizontale de la courbe $\mathcal{C}_K$ est donc le nombre de solutions de l'équation $g(x) = K$. Si $K \leq 0$, l'équation n'a pas de solution, et la courbe n'a donc pas de tangente horizontale. Si $0 < K < \frac{e^3}{4}$, l'équation admet une solution sur $] -\infty, 1[$ (la fonction g y est strictement croissante et bijective vers $]0, +\infty[$), mais aucune sur $]1, +\infty[$ où g est minorée par $\frac{e^3}{4}$. La courbe correspondante $\mathcal{C}_K$ admet donc une tangente horizontale (située à gauche de 1). Enfin, si $K > \frac{e^3}{4}$, il y aura trois solutions à l'équation, et donc trois tangentes horizontales (la fonction g étant bijective de $]1, 3[$ vers $]\frac{e^3}{4}, +\infty[$, mais aussi de $]3, +\infty[$ vers ce même intervalle). Seul cas particulier, si $K = \frac{e^3}{4}$, il y a aura exactement deux tangentes horizontales (dont une quand $x = 3$).
8. Évidemment, c'est facile à l'ordi, mais en respectant l'asymptote en $+\infty$, les tangentes parallèles en 1, et les présences de tangentes horizontales, on doit se rapprocher de quelque chose de correct. La courbe y_K passe par ailleurs par le point de coordonnées $(0, K)$. Ci-dessous, les courbes correspondant à $K = 1$ (en rouge), $K = 2$ (en orange), $K = -1$ (en bleu) et $K = -2$ (en vert). Je n'ai pas représenté de courbes ayant trois tangentes horizontales car on ne verrait rien à cette échelle.



Exercice 3

1. (a) On doit donc résoudre $e^x + e^{-x} = 4$. On pose classiquement le changement de variables $X = e^x$ pour obtenir l'équation du second degré $X^2 - 4X + 1 = 0$ (on a multiplié en passant par X , ce qui ne pose pas de problème, ça ne risque pas d'être nul). Cette équation a pour discriminant $\Delta = 16 - 4 = 12$, et pour racines $X_1 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ et $X_2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$. Ces deux valeurs étant strictement positives, l'équation initiale a deux solutions : $\mathcal{S} = \{\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3})\}$.
- (b) On peut résoudre directement l'équation, l'existence de la réciproque sera prouvée en passant. On doit donc résoudre $X^2 - 2yX + 1 = 0$ (on a bien sûr posé le même changement de variables qu'à la question précédente), qui a pour discriminant $\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$. Pour que l'équation ait des solutions, on doit avoir $y \geq 1$. On obtient alors deux valeurs $X_1 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1}$ qui est évidemment supérieur ou égal à 1 (puisque y lui-même est supposé l'être), et $X_2 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1}$. Comme $y^2 - 1 < y^2$, cette expression est strictement positive. De plus, elle est toujours inférieure à 1 car $y - \sqrt{y^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow y - 1 < \sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 < y^2 - 1$ (tout est positif), ce qui est vrai car $y > 1$. Dans le cas très particulier où $y = 1$, la solution double de l'équation est égale à 1. Sinon, une fois le changement de variable remonté, il existe une unique solution positive à l'équation de départ qui est $x_1 = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Ceci prouve que la fonction ch est bijective de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$, de réciproque $g : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
- (c) Il suffit de dériver l'expression précédente (qui est dérivable partout sauf en 1) : $g'(x) =$

$$\frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}(x + \sqrt{x^2-1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2. On va donc poser $y(x) = z(\arcsin(x)) = z(t)$. Tout cela est dérivable deux fois sur notre intervalle de résolution, et $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arcsin(x))$, puis $f''(x) = \frac{1}{1-x^2}z''(\arcsin(x)) - \frac{1}{2} \frac{-2x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}z'(\arcsin(x)) = \frac{1}{1-x^2} \left(z''(\arcsin(x)) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arcsin(x)) \right)$. En introduisant cela dans l'équation, on trouve donc $z''(\arcsin(x)) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arcsin(x)) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arcsin(x)) + z(\arcsin(x)) = x$, soit $z''(t) + z(t) = \sin(t)$, équation qu'on notera (E') , et qui a le bon goût d'être une équation du second ordre à coefficients constants.

L'équation homogène associée à (E') a pour solutions les fonctions $z_h : t \mapsto A \cos(t) + B \sin(t)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons pour commencer une solution particulière z_c à l'équation complexe $z'' + z = e^{it}$ (on en prendra la partie imaginaire à la fin pour trouver une solution particulière de (E') , puisque $\sin(t) = \Im(e^{it})$). Comme i a la très mauvaise idée d'être racine de l'équation caractéristique, on va donc chercher $z_c(t) = \alpha t e^{it}$ (inutile de rajouter une constante à notre polynôme du premier degré, ça nous fera gagner un tout petit peu de temps). On a alors $z'_c(t) = (\alpha + i\alpha t)e^{it}$, puis $z''_c(t) = (i\alpha + i\alpha - \alpha t)e^{it}$. On en déduit que $z''_c(t) + z_c(t) = 2i\alpha e^{it}$, et on va donc imposer la condition $2i\alpha = 1$, soit $\alpha = -\frac{1}{2}i$. Autrement dit, on aura $z_c(t) = -\frac{1}{2}ite^{it}$, et une solution particulière de l'équation (E') est donc $z_p(t) = \Im(z_c(t)) = -\frac{1}{2}t \cos(t)$.

Il ne reste plus qu'à conclure : les solutions de (E') sont les fonctions $z : t \mapsto \left(A - \frac{1}{2}t\right) \cos(t) + B \sin(t)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. On remonte le changement de variable en se rappelant que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, et on en déduit que les solutions de (E) sur $] -1, 1[$ sont de la forme $y(x) = \left(A - \frac{1}{2} \arcsin(x)\right) \sqrt{1-x^2} + Bx$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

3. On est reparti pour des calculs très similaires : $y(x) = z(g(x)) = z(t)$, donc $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}z'(g(x))$, puis $y''(x) = \frac{1}{x^2-1}z''(g(x)) - \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}z'(g(x))$. On introduit tout ça dans l'équation (E) et on trouve $-z''(g(x)) + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}z'(g(x)) - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}z'(g(x)) + z(g(x)) = x$, soit $-z''(t) + z(t) = \text{ch}(t)$ (puisque on a posé $t = g(x)$, et que g est la réciproque de la fonction ch).

L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions $z_h : t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, ou si on préfère $z_h(t) = C \text{ch}(t) + D \text{sh}(t)$. Pour une solution particulière, procédons par superposition et cherchons une solution z_1 à l'équation $-z'' + z = \frac{1}{2}e^t$ sous la forme $z_1(t) = \alpha t e^t$ (faut pas rêver, on a encore besoin d'augmenter le degré du polynôme), ce qui donne $z'_1(t) = (\alpha + \alpha t)e^t$, puis $z''_1(t) = (2\alpha + \alpha t)e^t$. La fonction est solution si $(-2\alpha - \alpha t + \alpha t) = \frac{1}{2}$, soit $\alpha = -\frac{1}{4}$ et $z_1(t) = -\frac{1}{4}te^t$. De même on cherche une solution z_2 à l'équation $-z'' + z = \frac{1}{2}e^{-t}$ sous la forme $z_2(t) = \beta t e^{-t}$, ce qui donne $z'_2(t) = (\beta - \beta t)e^{-t}$, puis $z''_2(t) = (-2\beta + \beta t)e^{-t}$. On veut donc que $2\beta = \frac{1}{2}$, soit $\beta = \frac{1}{4}$ et $z_2(t) = \frac{1}{4}te^{-t}$. En recollant les morceaux, une solution particulière de notre équation est donc $z_p(t) = \frac{1}{4}t(e^{-t} - e^t) = -\frac{1}{2}t \text{sh}(t)$.

On peut conclure : $z(t) = C \text{ch}(t) + \left(D - \frac{1}{2}t\right) \text{sh}(t)$, avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$. Il ne reste qu'à remonter le changement de variables, en remarquant que $\text{ch}^2(t) - \text{sh}^2(t) = 1$, donc $\text{sh}(t) =$

$\sqrt{\text{ch}^2(t) - 1}$ (au moins sur l'intervalle considéré où sh prend des valeurs positives). On peut alors écrire $y(x) = Cx + \left(D - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\right) \sqrt{x^2 - 1}$. Superbe.

4. Noooooon, on ne veut pas faire une troisième fois ces horribles calculs ! En fait ce n'est pas vraiment nécessaire, on peut poser $y(x) = z(g(-x)) = z(t)$, mais on peut surtout se rendre compte que les solutions obtenues à la question précédente restent valables sur notre dernier intervalle : le Cx est inchangé, les $\sqrt{x^2 - 1}$ aussi, et il faut simplement modifier le $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ en $\ln(-x + \sqrt{x^2 - 1})$ (fonction qui a la même dérivée que celle dont on est partis, puisque $\ln|u|$ a toujours pour dérivée $\frac{u'}{u}$, quel que soit le signe de u).

Exercice 4

- Cherchons donc à résoudre l'équation $f(z) = Z : iz + 1 + 2i = zZ - iZ \Leftrightarrow z(Z - i) = 1 + 2i + iZ$, équation qui a une solution unique si $Z \neq i$, ce qui prouve que l'application f est bien bijective de D dans lui-même, de réciproque $f^{-1} : Z \mapsto \frac{1 + 2i + iZ}{Z - i}$. Autrement dit, f est sa propre réciproque !
- Calculons :
 - $f(3i) = \frac{-3 + 1 + 2i}{2 + 2i} = 1 + i$.
 - $f(-i) = \frac{2 + 2i}{-2i} = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
 - $f(e^{i\frac{5\pi}{6}}) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + 1 + 2i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{1 + (4 - \sqrt{3})i}{-\sqrt{3} - i} = \frac{(1 + (4 - \sqrt{3})i)(-\sqrt{3} + i)}{3 + 1} = \frac{-\sqrt{3} + i + (3 - 4\sqrt{3})i + \sqrt{3} - 4}{4} = -1 + (1 - \sqrt{3})i$.
- Calcul classique, en posant $z = a + ib$, on a $f(z) = \frac{ia - b + 1 + 2i}{a + i(b - 1)} = \frac{((1 - b) + i(a + 2))(a + i(1 - b))}{a^2 + (b - 1)^2} = \frac{a - ab - (a + 2)(1 - b) + i(a^2 + 2a + (1 - b)^2)}{a^2 + (b - 1)^2} = \frac{2b - 2 + i(a^2 + 2a + b^2 - 2b + 1)}{a^2 + (b - 1)^2}$ (on peut bien sûr séparer en deux fractions distinctes pour vraiment écrire une forme algébrique si on le souhaite).
- Il faut donc que la partie imaginaire de $f(z)$ soit nulle, ce qui est le cas si $a^2 + 2a + b^2 - 2b + 1 = 0$, soit $(a + 1)^2 + (b - 1)^2 = 1$. On reconnaît l'équation du cercle centré au point d'affixe $-1 + i$ et de rayon 1, auquel il faut enlever le point d'affixe i (qui lui appartient) pour être rigoureux.
- Cette fois, on doit avoir $2b - 2 = 0$, donc $b = 1$, il s'agit simplement de la droite horizontale d'équation $y = 1$, privée à nouveau du point d'affixe i .
- Il est plus simple ici de repartir de l'expression initiale : $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow |iz + 1 + 2i| = |z - i|$. On pose maintenant $z = a + ib$, et on peut élever les modules au carré sans problème : $|1 - b + i(a + 2)|^2 = |a + i(b - 1)|^2 \Leftrightarrow 1 - 2b + b^2 + a^2 + 4a + 4 = a^2 + b^2 - 2b + 1 \Leftrightarrow 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -1$. Il s'agit à nouveau d'une droite, verticale cette fois-ci, d'équation $x = -1$.
- (a) On doit donc résoudre l'équation $iz + 1 + 2i = z^2 - iz$, soit $z^2 - 2iz - 1 - 2i = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré, de discriminant $\Delta = -4 + 4 + 8i = 8i$. Pas vraiment besoin d'utiliser la méthode classique pour trouver une racine carrée du discriminant : $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ admet pour racine carrée $\sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 + 2i$. On en déduit que les racines de l'équation sont $z_1 = \frac{2i - 2 - 2i}{2} = -1$ (celle qu'on notera a) et $z_2 = \frac{2i + 2 + 2i}{2} = 1 + 2i$ (qu'on notera donc b).
- (b) Calculons : $\frac{a - i}{b - i} = \frac{-1 - i}{1 + i} = -1$. Bon, au moins c'était pas dur.

(c) Ce calcul est plus pénible : en mettant tout au même dénominateur,

$$\frac{b-f(z)}{a-f(z)} = \frac{(1+2i)(z-i) - iz - 1 - 2i}{i - z - iz - 1 - 2i} = -\frac{z(1+i) + 1 - 3i}{z(i+1) + 1 + i} = -\frac{z + \frac{(1-3i)(1-i)}{(i+1)(1-i)}}{z + \frac{1+i}{i+1}} =$$

$$-\frac{z-1-2i}{z+1} = -\frac{z-b}{z-a} = -\frac{b-z}{a-z}, \text{ ce qu'on voulait.}$$

8. (a) C'est en fait trivial en utilisant le dernier calcul effectué : puisque les nombres $\frac{b-f(z)}{a-f(z)}$

et $\frac{b-z}{a-z}$ sont opposés, ils ont le même argument modulo π , ce qui revient exactement à dire que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'})[\pi]$. La propriété donnée dans l'énoncé permet alors de conclure que A, B, M et M' sont soit alignés soit situés sur un même cercle (ce qui revient bien à dire que M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM).

(b) Calculons donc $\frac{f(z)-i}{z-i} = \frac{iz+1+2i-iz-1}{(z-i)^2} = \frac{2i}{(z-i)^2}$. Or, on constate que $(b-i)^2 = (1+i)^2 = 2i$, donc $\frac{f(z)-i}{z-i} = \left(\frac{b-i}{z-i}\right)^2$. En passant aux arguments, l'égalité demandée en découle immédiatement puisque $\arg\left(\frac{b-i}{z-i}\right)^2 = 2 \arg\left(\frac{z-i}{b-i}\right)$.

(c) Pour construire rigoureusement le point M' , on peut procéder de la façon suivante :

- on trace le cercle circonscrit au triangle ABM . Rappelons en passant que ce cercle a pour centre le point Z de concours des médiatrices des côtés du triangle, qu'on peut toujours tracer sans difficulté à la règle et au compas (construction classique : on choisit une longueur plus grande que la moitié de la longueur du segment, et on reporte cette longueur à partir des deux extrémités du segment, de façon à déterminer deux points à égale distance de ces extrémités ; il ne reste plus qu'à tracer la droite passant par ces deux points, qui est la médiatrice recherchée).
- on trace le symétrique N du point M par rapport à la droite (BC) : pour cela on reporte les longueurs CM et BM à partir des points C et B pour trouver un deuxième point N vérifiant $BN = BM$ et $CN = CM$, ce deuxième point est le symétrique recherché.
- le point M' est alors situé sur la droite (CN) (à cause de l'égalité d'angles vérifiée à la question b, je vous laisse y réfléchir si vous n'êtes pas convaincus) et sur le cercle circonscrit tracé auparavant.

(d) Sur la figure suivante, la médiatrice de $[BM]$ a pour équation $x = \frac{3}{2}$ (c'est évident) et celle de $[AB]$ a pour équation $y = 1 - x$ (là aussi c'est à peu près évident) donc le centre du cercle circonscrit est $Z\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right)$. Ce point et le cercle sont en vert sur le dessin. En violet se trouve le point N (je n'ai pas mis de traits de construction, sinon ça va surcharger la figure), le point M' est à l'intersection de (CN) et du cercle. On peut vérifier facilement : $f(2+2i) = \frac{2i-2+1+2i}{2+i} = \frac{(-1+4i)(2-i)}{5} = \frac{2+9i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{9}{5}i$, ce qui correspond bien à l'abscisse du point obtenu.

