Devoir Surveillé n°3

PTSI B Lycée Eiffel

2 décembre 2017

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Calculs divers (et indépendants) :

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2(x)\ dx$.
2. Soit f l'application du plan complexe dans lui-même définie par $f(z) = iz+2+2i$. Reconnaitre l'application f et déterminer ses éléments caractéristiques (centre, rapport, angle).
3. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = e^x$.
4. On pose $P(z) = z^3 - z^2 + (i-3)z + 6 + 2i$.
   (a) Déterminer les racines carrées complexes du nombre $a = -3 - 4i$.
   (b) Montrer que P admet une racine réelle, qu'on déterminera.
   (c) En déduire toutes les racines du polynôme P.
5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\ dx$ à l'aide du changement de variable $t = \arctan(x)$.

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle (E) :

$$(1+x^2)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$$

1. Déterminer une solution particulière de (E) en la recherchant sous forme d'un polynôme de degré 1.
2. Résoudre complètement l'équation (E). On notera y_K les solutions de l'équation, et $\mathcal{C}_K$ les courbes intégrales correspondantes.
3. Que dire des tangentes en leur point d'abscisse 1 aux courbes $\mathcal{C}_K$?
4. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_K$ ont une asymptote quand x tend vers $+\infty$, que l'on déterminera. Préciser la position relative des courbes et de cette asymptote.
5. Montrer que les points à tangente horizontale des courbes intégrales sont tous situés sur la courbe représentative d'une fonction à préciser (mais qu'on n'étudiera pas).
6. Étudier la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{(x-1)^2}$.
7. Déterminer, selon les valeurs de K, le nombre de points de la courbe $\mathcal{C}_K$ ayant une tangente horizontale.
8. Proposer une allure de quelques courbes intégrales compatible avec les observations précédentes (on ne demande pas d'étude plus précise des solutions de (E), et en particulier pas d'étude de variations).

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $(E) : (1-x^2)y'' - xy' + y = x$.

1. Question préliminaire : on rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
   (a) Résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$.
   (b) Montrer que la fonction ch est bijective de $[0, +\infty[$ vers un intervalle à préciser, et déterminer une expression explicite de sa réciproque (à l'aide de la fonction ln), qu'on notera g pour la suite de l'exercice. Pour cela, on résoudra l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ en ne gardant que la solution positive de l'équation.
   (c) Vérifier que $\forall y > 1$, $g'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]-1, 1[$ en effectuant le changement de variable $t = \arcsin(x)$.
3. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]1, +\infty[$ en effectuant le changement de variable $t = g(x)$, où g est la fonction définie dans la première question de l'exercice.
4. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]-\infty, -1[$.

Exercice 4

On note f l'application définie sur $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ (ensemble qu'on notera D pour la suite de l'exercice) par $f(z) = \dfrac{iz + 1 + 2i}{z - i}$.

1. Vérifier que l'application f est une bijection de D dans lui-même (on donnera une expression de sa réciproque f^{-1}).
2. Déterminer $f(3i)$ (sous forme algébrique), $f(-i)$ (sous forme exponentielle) et $f(e^{i\frac{5\pi}{6}})$ (sous forme algébrique).
3. Déterminer la forme algébrique de $f(z)$.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$ (on en donnera une interprétation géométrique simple).
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$ (on en donnera une interprétation géométrique simple).
6. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$ (on en donnera une interprétation géométrique simple).
7. (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$. On notera les deux solutions obtenues a et b, avec $\mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(b)$.
   (b) Calculer $\dfrac{a-i}{b-i}$.
   (c) Montrer que, si $z \notin \{i, a\}$, alors $\dfrac{b - f(z)}{a - f(z)} = -\dfrac{b-z}{a-z}$.
8. Pour cette dernière question, on admet que quatre points A, B, C et D du plan complexe sont situés sur une même droite ou sur un même cercle si et seulement si $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi]$. On note par ailleurs A, B et C les points respectifs du plan complexe d'affixes a, b et i.
   (a) Montrer que, si $M \notin \{A, B, C\}$, M' est aligné avec A, B et M, ou situé sur le cercle circonscrit au triangle ABM (où M et M' ont pour affixes respectives z et $f(z)$ pour un certain nombre complexe z).
   (b) Montrer que $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}) \equiv 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB})[2\pi]$.
   (c) En déduire une construction géométrique de M' quand M n'est pas sur la droite (AB).
   (d) Faire une figure précise dans le cas où M a pour affixe $z = 2 + 2i$.