Devoir Surveillé n°2

PTSI B Lycée Eiffel

14 octobre 2017

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On définit dans cet exercice une fonction f par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f, et en déduire un intervalle d'étude de la fonction.
3. Calculer les images suivantes : $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
5. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et en déduire les variations de f sur l'intervalle d'étude choisi.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 0. Même question au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{4}$.
7. On admet que $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty$. Tracer une allure de la courbe représentative de f (on essaiera évidemment de faire figurer les tangentes calculées à la question précédente).
8. Justifier que f effectue une bijection de $]-\pi, \pi[$ vers un intervalle à déterminer, et donner une allure de la courbe représentative de sa réciproque.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, puis $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}$.

1. Calculer les valeurs de a_i, S_i et T_i pour tous les entiers i inférieurs ou égaux à 4.
2. Justifier que $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k) a_{n-k} a_k$ (aucun calcul nécessaire), et en déduire que $T_n = \dfrac{n}{2} S_n$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$.
4. Déduire des deux questions précédentes que $T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$, puis que $\dfrac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$.
5. En déduire par récurrence que $S_n = a_{n+1}$ pour tout entier naturel n.
6. Montrer que a_n est un nombre entier.

Exercice 3

On cherche à déterminer quels sont les réels x pour lesquelles l'égalité $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\arcsin(x)$ est vérifiée. Pour cela, on va poser $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de f. Peut-on restreindre l'étude de f à un intervalle plus petit que $\mathcal{D}_f$?
2. Étudier rigoureusement l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.
3. Calculer et simplifier $f'(x)$.
4. En déduire une expression simplifiée de f sur chacun des intervalles où elle est dérivable, et répondre à la question posée en début d'énoncé.
5. On souhaite retrouver le résultat précédent par une autre méthode.
   (a) Justifier, si $x \in \mathcal{D}_f$ l'existence d'un unique réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \sin(\theta)$.
   (b) Justifier que, si $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(t)) = \pi - t$. Trouver une formule similaire pour $\arcsin(\sin(t))$ si $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) En déduire une simplification de $f(\sin(\theta))$ (en distinguant éventuellement des cas) et conclure.

Exercice 4

Le but de cet exercice est d'étudier des formules ressemblant à la formule de Machin vue en exercice.

1. (a) Rappeler la formule donnant $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$, et en déduire que $\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.
   (b) Démontrer que $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$.
   (c) En déduire une expression de $\frac{\pi}{4}$ comme somme de trois valeurs de la fonction arctan.
2. On définit la suite de Fibonacci (F_n) de la façon suivante : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
   (a) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n$.
   (b) En posant $G_n = \arctan\left(\frac{1}{F_n}\right)$, en déduire que $G_{2n} = G_{2n+1} + G_{2n+2}$ si $n \geq 1$. Écrire les formules correspondantes lorsque $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
   (c) En déduire la formule $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n-1} G_{2k+1} + G_{2n}$. Écrire la formule correspondante lorsque $n = 4$.
3. (a) Démontrer que, $\forall x \geq 1$, $\forall y > 1$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = \arctan\left(\frac{x+y}{xy-1}\right)$.
   (b) En déduire les deux formules supplémentaires $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = \arctan\left(\frac{y-x}{xy+1}\right)$ et $2\arctan\left(\frac{1}{y}\right) = \arctan\left(\frac{2y}{y^2-1}\right)$.
   (c) En appliquant judicieusement les formules précédentes, montrer les égalités suivantes (non, ne cherchez pas de subtilités inutiles, c'est très bourrin) :
      - $\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{17}{331}\right) + \arctan\left(\frac{123}{836}\right)$
      - $\arctan\left(\frac{123}{836}\right) = 2\arctan\left(\frac{3}{41}\right)$
      - $\arctan\left(\frac{17}{331}\right) = \arctan\left(\frac{1}{18}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$
      - $\arctan\left(\frac{3}{41}\right) = \arctan\left(\frac{1}{18}\right) + \arctan\left(\frac{1}{57}\right)$
   (d) En partant de la formule de Machin $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ (qu'on ne demande pas de redémontrer), exploitez les formules précédentes pour prouver la superbe formule suivante :

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\left(\frac{1}{18}\right) + 8\arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 5\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

   Cette dernière formule, attribuée à Gauss, a permis de calculer un million de décimales de π en 1974.