

Devoir Surveillé n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 septembre 2017

Exercice 1

1. L'équation n'a de sens que si $x \neq 0$, on peut multiplier par x pour obtenir l'équation du second degré équivalent $2x^2 + x - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$ et $x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$. Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.
2. L'inéquation n'a de sens que si $x^2 + 5x + 3 \geq 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 - 12 = 13$ et admet pour racines $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$. Il est positif à l'extérieur de ses racines, l'inéquation est donc définie sur $\left]-\infty, \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$. Elle ne peut jamais être vérifiée si $x \leq -2$, puisque dans son cas son membre de gauche est positif, alors que celui de droite est négatif. Comme $\sqrt{13} > 3$, $x_1 < -4$ et $x_2 > -1$, on peut donc se contenter de résoudre sur le deuxième intervalle $\left[\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$. Sur cet intervalle, on peut élever au carré pour obtenir une inéquation équivalente (tout est positif) : $x^2 + 5x + 3 < x^2 + 4x + 4$, soit $x - 1 < 0$, et donc $x < 1$. Vu notre intervalle de résolution, on conserve donc $\mathcal{S} = \left[\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}, 1\right[$.
3. Cette équation du troisième degré admet $x = 2$ comme solution évidente : $2^3 - 39 \times 2 + 70 = 8 - 78 + 70 = 0$. On peut donc factoriser : $x^3 - 39x + 70 = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a = 1$; $b - 2a = 0$ donc $b = 2$; $c - 2b = -39$ donc $c = -35$ (ce qui est compatible avec la dernière condition $-2c = 70$). Reste à résoudre la deuxième possibilité $x^2 + 2x - 35 = 0$, le trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 + 140 = 144 = 12^2$, et admet pour racines $x_1 = \frac{-2 - 12}{2} = -7$ et $x_2 = \frac{-2 + 12}{2} = 5$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-7, 2, 5\}$.
4. On fait tout passer à gauche et on met au même dénominateur en profitant du fait que $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ pour obtenir $\frac{(x+3)^2 - (x-3)^2 - 36}{x^2 - 9} \leq 0$, soit $\frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 - 36}{x^2 - 9} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{12(x-3)}{(x-3)(x+3)} \leq 0$. Si $x \neq 3$ (qui sera valeur interdite et donc à exclure de notre ensemble de solutions, on trouve la condition équivalente $\frac{12}{x+3} \leq 0$, soit $x < -3$ (il faut évidemment enlever également l'autre valeur interdite). Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty, -3[$.
5. Quitte à multiplier par e^x (qui ne s'annule jamais) et à poser $X = e^x$, on se ramène à l'équation du second degré $X^2 - 2mX - 1 = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 4m^2 + 4 = 4(m^2 + 1)$ qui est toujours strictement positif, et admet donc toujours deux racines réelles $X_1 = \frac{2m - 2\sqrt{m^2 + 1}}{2} = m - \sqrt{m^2 + 1}$ et $X_2 = m + \sqrt{m^2 + 1}$. Reste à savoir si ces deux solutions sont positives pour qu'on puisse leur associer une valeur de x . Quelle que soit la valeur du paramètre m , on peut écrire $\sqrt{m^2 + 1} > \sqrt{m^2} = |m|$. Cela suffit à prouver que

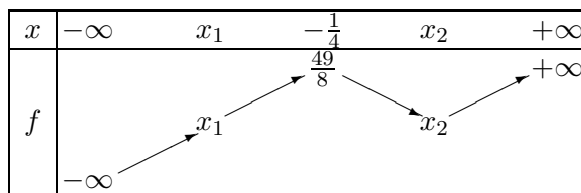
$X_1 < 0$ (si $m \leq 0$ c'est évident, et sinon $X_1 < m - m < 0$ d'après le calcul précédent), et aussi que $X_2 > 0$ (cette fois c'est évident si $m \geq 0$ et sinon $X_1 > m - m = 0$, puisque $\sqrt{m^2 + 1} > |m| = -m$). Finalement, on aura toujours une unique solution à notre équation : $\mathcal{S} = \{\ln(m + \sqrt{m^2 + 1})\}$. Les plus curieux essaient de comprendre qu'on vient en fait de prouver par une méthode n'utilisant pas les fonctions (ni le théorème de la bijection donc), que la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on a accessoirement prouvé qu'elle admet pour réciproque la fonction $\text{sh}^{-1} : y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ (aussi connue sous le doux nom d'Argsh).

Exercice 2

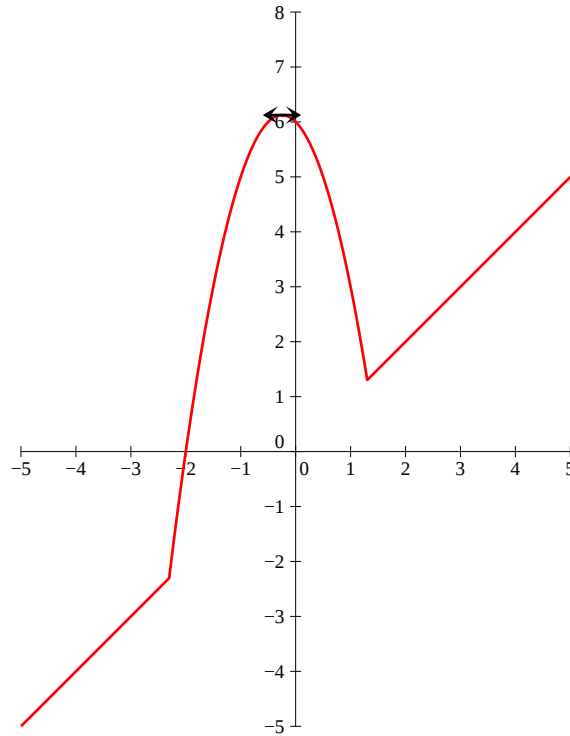
- Il faut commencer par étudier le signe du trinôme $x^2 + x - 3$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 12 = 13$ et admet les superbes racines $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$. À l'extérieur de ces racines, on aura $f(x) = x^2 + x - 3 - x^2 + 3 = x$, donc $f(x) = x$ sur chacun des deux intervalles $] -\infty, x_1]$ et $[x_2, +\infty[$. Au contraire, dans l'intervalle $[x_1, x_2]$, on a $f(x) = -x^2 - x + 3 - x^2 + 3 = -2x^2 - x + 6$.
- Puisque 0 se trouve dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ (c'est évident, $\sqrt{13} > 1$), l'équation $f(x) = 0$ ne peut pas avoir de solution sur $] -\infty, x_1]$ ($f(x)$ y sera négatif puisque $x \leq 0$ sur cet intervalle) ou sur $[x_2, +\infty[$ (où cette fois la fonction sera positive). Sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, il faut résoudre l'équation $-2x^2 - x + 6 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 48 = 49$ et admet comme racines $x_3 = \frac{1 + 7}{-4} = -2$ et $x_4 = \frac{1 - 7}{-4} = \frac{3}{2}$. Or, comme $3 < \sqrt{13} < 4$, on aura $x_1 < \frac{-1 - 3}{2} = -2$, et $x_2 < \frac{-1 + 4}{2} = \frac{3}{2}$. autrement dit, seule la racine $x_3 = -2$ se trouve dans notre intervalle de résolution, donc $\mathcal{S} = \{-2\}$. Par ailleurs, le trinôme $-2x^2 - x + 6$ est négatif à l'extérieur de ses racines, donc ici $f(x)$ sera négatif sur $[x_1, -2]$. On peut résumer le signe de $f(x)$ dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

- La fonction f est trivialement croissante sur chacun des deux intervalles $] -\infty, x_1]$ et $[x_2, +\infty[$ puisqu'on a alors $f(x) = x$. Elle est par ailleurs dérivable sur $]x_1, x_2[$, de dérivée $f'(x) = -4x - 1$, qui s'annule lorsque $x = -\frac{1}{4}$. On peut calculer $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{2}{16} + \frac{1}{4} + 6 = \frac{49}{8}$. Inutile par contre de calculer $f(x_1)$ qui est égal à $x_1 \simeq -2.3$ si on tient à bien le placer sur la courbe (on exploite la valeur approchée donnée dans l'énoncé). Idem pour $f(x_2) = x_2 \simeq 1.3$.



- Voici une allure de courbe :



Exercice 3

1. Puisque la fonction est définie sur $]0, +\infty[$, il n'y a pas de raison de l'étudier ailleurs. On a $f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ qui est du signe de $x-1$. La fonction f admet donc en 1 un minimum de valeur $f(1) = e$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et sans croissance comparée (pas de forme indéterminée) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
f	$+\infty$	e	$+\infty$

2. D'après l'étude précédente, la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 1[$, donc bijective de $]0, 1[$ vers $]e, +\infty[$. Tout réel de l'intervalle $]e, +\infty[$ admet donc un unique antécédent dans $]0, 1[$. De même, f est strictement croissante et bijective de $]1, +\infty[$ vers $]e, +\infty[$, donc tout réel de $]e, +\infty[$ admet un deuxième antécédent dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Le réel e est par ailleurs le seul à avoir un unique antécédent, égal à 1. L'équation $f(x) = a$ admet donc deux solutions lorsque $a > e$, une seule lorsque $a = e$, et aucune lorsque $a < e$.
3. Comme on l'a déjà signalé ci-dessus, on peut prendre $I = [1, +\infty[$ et $J = [e, +\infty[$. Le théorème de la bijection assure que la réciproque g aura la même monotonie et le tableau de variations suivant :

x	e	$+\infty$
g		$+\infty$
	1	

Exercice 4

- Il n'y a aucun problème en $+\infty$, où la limite vaut simplement $+\infty$ par produit de limites égales à $+\infty$. En 0, il n'y a pas vraiment de problème non plus puisqu'il s'agit d'un résultat tout à fait classique de croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln(x))^n = 0$.
- La fonction $f_1 : x \mapsto x \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f_1'(x) = \ln(x) + 1$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln(x) = -1$, donc pour $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$, la fonction f_1 étant décroissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ et croissante ensuite. On calcule $f_1\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-1) = -\frac{1}{e}$ et les limites calculées à la question précédente permettent de dresser le tableau complet suivant :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f_1			$+\infty$
	0	$-\frac{1}{e}$	

La fonction $f_2 : x \mapsto x(\ln(x))^2$ admet pour dérivée $f_2'(x) = (\ln(x))^2 + x \times \frac{2 \ln(x)}{x} = \ln(x)(\ln(x) + 2)$. Le deuxième facteur s'annule lorsque $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$, le premier lorsque $x = 1$. On calcule $f_2(1) = 0$ et $f_2\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} \times (-2)^2 = \frac{4}{e^2}$ et on complète le tableau suivant :

x	0	$\frac{1}{e^2}$	1	$+\infty$
$\ln(x)$	-	-	0	+
$\ln(x) + 2$	-	0	+	+
$f_2'(x)$	+	0	-	+
f_2				$+\infty$
	0	$\frac{4}{e^2}$	0	

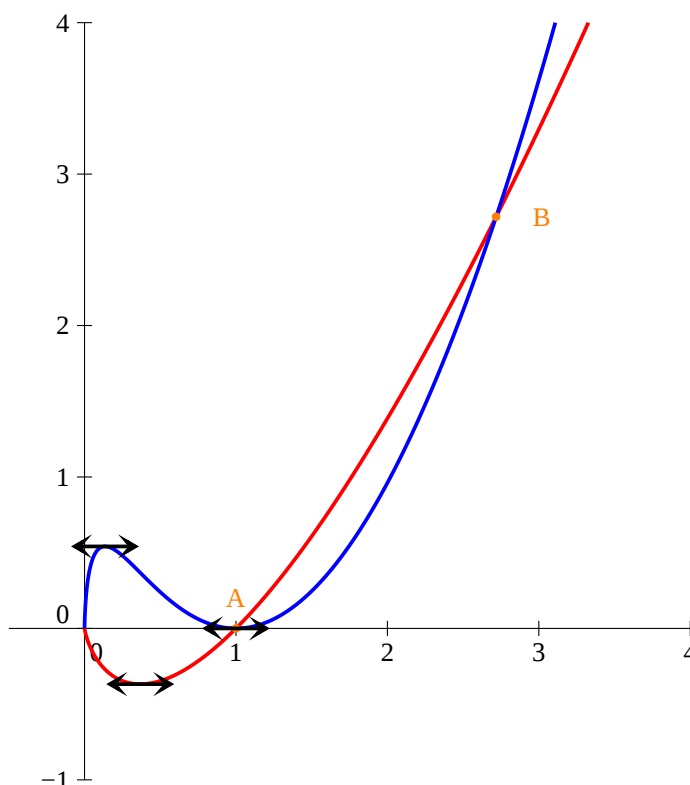
- L'équation peut s'écrire $x \ln(x) - x(\ln(x))^2 = 0$, soit $x \ln(x)(1 - \ln(x)) = 0$. Comme 0 n'appartient pas au domaine de définition des fonctions, les seules possibilités sont $x = 1$ et $x = e$, donc $\mathcal{S} = \{1, e\}$. La position relative est obtenue en étudiant le signe de la différence calculée ci-dessus (sachant que x est positif sur tout l'intervalle de définition) :

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+	+
$1 - \ln(x)$	+	+	0	-
$f_1(x) - f_2(x)$	-	0	+	-

La courbe $\mathcal{C}_\infty$ est donc située au-dessus de $\mathcal{C}_e$ sur l'intervalle $]1, e[$ mais en-dessous sur les deux intervalles $]0, 1[$ et $]e, +\infty[$. Les deux courbes se coupent aux points $A(1, 0)$ et $B(e, e)$

(puisque $f_1(e) = f_2(e) = e \times 1 = e$). Si toutes les courbes admettent deux points communs, il ne peut s'agir que des points A et B , il suffit donc de vérifier que $f_n(1) = 0$ (c'est vrai) et $f_n(e) = e$ (c'est vrai aussi puisqu'on a toujours $(\ln(e))^n = 1$).

4. On calcule simplement $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x(\ln(x))^n - x(\ln(x))^{n+1} = x(\ln(x))^n(1 - \ln(x))$. Sur l'intervalle demandé, les termes x et $(\ln(x))^n$ sont toujours positifs, la différence est donc du signe de $1 - \ln(x)$. On en déduit comme à la question précédente que $\mathcal{C}_n$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$ sur $]1, e[$ mais en-dessous sur $]e, +\infty[$ (les points d'intersection étant les deux points communs à toutes les courbes).
5. Sur $]0, 1[$, on aura $f_n(x) > 0$ lorsque n est pair, et $f_n(x) < 0$ lorsque n est impair, ce qui assure évidemment que $\mathcal{C}_n$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$ si n est pair, et en-dessous si n est impair. Mais on peut aussi essayer de comparer entre elles les courbes correspondant à différentes valeurs paires (ou impaires) de n . Pour cela, calculons $f_n(x) - f_{n+2}(x) = x(\ln(x))^n(1 - \ln^2(x)) = x(\ln(x))^n(1 - \ln(x))(1 + \ln(x))$. Si n est pair, chacun des trois premiers termes est positif sur $]0, 1[$, seul compte donc le signe de $1 + \ln(x)$, qui s'annule lorsque $x = \frac{1}{e}$. On calcule alors $f_n\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-1)^n = \frac{1}{e}$ puisqu'on a supposé n pair. On déduit de ce calcul que la courbe $\mathcal{C}_n$ est en-dessous de $\mathcal{C}_{n+2}$ sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ et au-dessus sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right[$ lorsque n est pair. Lorsque n est impair, $(\ln(x))^n$ devient négatif, et les positions relatives sont inversées, avec un point d'intersection de coordonnées $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$.
6. Voici les deux courbes demandées :



7. Généralisons donc : $f'_n(x) = (\ln(x))^n + x \times \frac{n(\ln(x))^{n-1}}{x} = \ln(x)^{n-1}(n + \ln(x))$. Le deuxième facteur s'annule toujours lorsque $x = e^{-n}$, on peut calculer $f(e^{-n}) = e^{-n} \times (-n)^n = \left(-\frac{n}{e}\right)^n$ (on pourra sortir le $-$ lorsque n est impair et le faire disparaître lorsque n est pair). Le signe

de $(\ln(x))^{n-1}$ change en 0 uniquement lorsque n est pair, ce qui donne le tableau de variations suivant lorsque n est impair :

x	0	$\frac{1}{e^n}$	$+\infty$
f_n	0	$-\left(\frac{n}{e}\right)^n$	$+\infty$

Et le tableau suivant lorsque n est pair :

x	0	$\frac{1}{e^n}$	1	$+\infty$
f_n	0	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	0	$+\infty$

Exercice 5

- La fonction f est définie si $\frac{x+2}{x} > 0$ (ce qui suppose déjà bien entendu que $x \neq 0$). Un petit tableau de signe donne facilement $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ (alternativement on peut étudier les deux cas où x et $x+2$ sont tous les deux strictement positifs, ou tous les deux strictement négatifs).
- Lorsque $x > 0$, on peut écrire $f(x) = x \ln(x+2) - x \ln(x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} = 0$ (évident), $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x+2) = 0$ (pas de forme indéterminée), et surtout $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ par croissance comparée, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$.
 - On peut remarquer que $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$, qui est assez clairement du signe de x (puisque ce qui se trouve dans le $\ln$ va être strictement plus grand que 1 si $x > 0$, et strictement plus petit sinon). Quand on le multiplie par x , on obtiendra donc toujours quelque chose de positif. On en déduit que $f(x) \geq \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$. Comme on a déjà $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} = +\infty$, on aura a fortiori $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - En posant $x = \frac{2}{u}$ (ce qu'on peut toujours faire lorsque $x > 0$), on aura $\frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x} = 1+u$, donc $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \frac{2 \ln(1+u)}{u}$. Or, quand x tend vers $+\infty$, u va tendre vers 0 (par valeurs supérieures, mais peu importe ici), et on connaît la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$. On en déduit bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$. une autre façon de voir les choses est de dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{x}{4} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, ou encore que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{2}\right) = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ est asymptote oblique à la droite en $+\infty$. Elle l'est d'ailleurs tout autant en $-\infty$ puisqu'on peut faire rigoureusement le même calcul de l'autre côté (et on a donc en passant $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$).
- On peut commencer par signaler que $x \mapsto \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$ a pour dérivée $x \mapsto -\frac{2}{x^2}$. On en déduit que $f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + x \times \frac{-2}{x^2} \times \frac{x}{x+2} + \frac{1}{4} = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$, ce

qui ressemble évidemment très étrangement à la définition de la fonction g donnée à la question d'après, mais attention, f' est définie sur le même ensemble que f alors que g n'est égale à f' que sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- (b) On a déjà signalé que $\mathcal{D}_g =]0, +\infty[$. On peut calculer $g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x(x+2) - (x+2)^2 + 2x}{x(x+2)^2} = \frac{x^2 + 2x - x^2 - 4x - 4 + 2x}{x(x+2)^2} = -\frac{4}{x(x+2)^2}$, expression qui est strictement négative sur le domaine de définition de g . La fonction est donc strictement décroissante. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ (aucune difficulté, le seul terme n'ayant pas une limite finie est $-\ln(x)$), et on peut écrire $g(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$ pour se convaincre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{4}$ (sous cette forme, le premier terme a une limite nulle facile en $+\infty$).

- (c) En effet, g effectue une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$, et elle est en particulier strictement positive. Comme elle coïncide avec f' sur $]0, +\infty[$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Reste à gérer l'intervalle $] -\infty, -2[$! On a déjà calculé la limite de f en $-\infty$, et comme $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{x} = 0^+$ (numérateur et dénominateur sont tous les deux négatifs), on aura $\lim_{x \rightarrow -2} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = -\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$ (il n'y a plus de forme indéterminée ensuite). De plus, on peut poser sur cet intervalle $f'(x) = h(x) = \ln(-x-2) - \ln(-x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$. Cette fonction h a la très bonne idée d'avoir exactement la même dérivée que g (le changement de signe dans les $\ln$ ne change jamais la dérivée, puisque dans la formule $\frac{u'}{u}$ de la dérivée de $\ln(u)$, on va changer à la fois le signe du numérateur et celui du dénominateur), soit $h'(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$. Cette dérivée est strictement positive sur $] -\infty, -2[$, la fonction h y est donc croissante. On peut de plus calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \frac{1}{4}$ (c'est exactement le même calcul que pour la limite de g en $+\infty$), ce qui prouve que h , et donc f' , est strictement positive sur $] -\infty, -2[$. On a donc le tableau de variations complet suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

4. On calcule donc $f(1) = \ln(3) + \frac{3}{4}$ et $f'(1) = \ln(3) - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \ln(3) - \frac{5}{12}$. La tangente recherchée a donc pour équation $y = \left(\ln(3) - \frac{5}{12}\right)(x-1) + \ln(3) + \frac{3}{4} = \left(\ln(3) - \frac{5}{12}\right)x + \frac{7}{6}$. Le coefficient directeur de la tangente est donc $\ln(3) - \frac{5}{12} \simeq 1.1 - 0.4 \simeq 0.7$, et son ordonnée à l'origine $\frac{7}{6} \simeq 1.2$.
5. Et une dernière courbe pour terminer ce superbe devoir :

