Devoir Maison n° 8

PTSI B Lycée Eiffel

Problème : irrationalité de $\zeta(2)$.

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, on définit $\zeta(p) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$.

I. Étude de la convergence de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \right)$.

Dans cette partie, on note $S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$, et on cherche donc à prouver la convergence de la suite $(S_n(p))$ (ce qui prouvera l'existence de sa limite $\zeta(p)$).

1. Déterminer la monotonie de la suite $(S_n(p))$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on a $\frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^p}\, dt \leqslant \frac{1}{k^p}$.
3. En déduire que $S_n(p) - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^p}\, dt$.
4. Montrer que cette intégrale est elle-même inférieure ou égale à $\frac{1}{p-1}$.
5. Conclure quand à la convergence de la suite $(S_n(p))$.

II. Polynômes et nombres de Bernoulli.

On définit la suite des polynômes de Bernoulli (B_n) de la façon suivante : $B_0 = 1$, et pour tout entier $n \geqslant 1$, $B_n' = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(t)\, dt = 0$.

1. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, montrer qu'il existe une unique primitive F de f vérifiant $\int_0^1 F(t)\, dt = 0$. En déduire que les conditions données ci-dessus définissent une unique suite de polynômes (B_n).
2. Calculer B_1, B_2 et B_3. En notant $b_n = B_n(0)$, calculer b_1, b_2 et b_3.
3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, calculer $B_n(1) - B_n(0)$.
4. Montrer que $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. En déduire que, si n est impair, $b_n = 0$.
5. (a) Montrer que $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$.

   (b) En déduire que $\forall p \geqslant 2$, $\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} b_{p-k} = 0$.

   (c) Montrer que, pour tout entier p, on a $b_{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} b_k$.

(d) En déduire que $b_{2p} = -\dfrac{1}{(2p+1)(2p+2)} \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k$.

III. Calcul explicite de $\zeta(2p)$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$ (on pourra par exemple passer par des exponentielles complexes), puis déterminer une constante réelle λ telle que $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{2\sin(t)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) + \lambda$.
2. Montrer que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin((2n+1)t)\, dt = 0$.
3. Pour tout couple d'entiers (p, k), on définit $J_{p,k} = \displaystyle\int_0^{\pi} B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right) \cos(2kt)\, dt$.
   (a) À l'aide de deux intégrations par partie, calculer $J_{1,k}$.
   (b) Déterminer une relation de récurrence entre $J_{p,k}$ et $J_{p-1,k}$.
   (c) En déduire l'expression de $J_{p,k}$ en fonction de p et de k.
4. On définit désormais une fonction φ_p sur $[0, \pi]$ en posant $\varphi_p(0) = \varphi_p(\pi) = 0$, et $\forall x \in]0, \pi[$, $\varphi_p(x) = \dfrac{B_{2p}(\frac{x}{\pi}) - b_{2p}}{\sin(x)}$. On **admet** que cette fonction φ_p est toujours de classe $\mathcal{C}_1$ sur $[0, \pi]$.
   (a) Donner une expression de $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\, dt$ en fonction de n, p et b_{2p}.
   (b) En déduire la valeur de $\zeta(2p)$ en fonction de p et de b_{2p}.
   (c) Donner en particulier les valeurs de $\zeta(2)$ et de $\zeta(4)$.

IV. Irrationnalité de $\zeta(2)$.

Dans toute cette partie, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer qu'il existe des entiers λ_n, λ_{n+1}, ..., λ_{2n}, tels que $f_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \lambda_i x^i$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(0)$ est entier.
   (c) En remarquant que $f_n(1-x) = f_n(x)$, en déduire que $f_n^{(k)}(1)$ est également entier.
2. On veut prouver par un raisonnement par l'aburde que π^2 est un nombre irrationnel. On suppose donc que $\pi^2 = \dfrac{u}{v}$, où u et v sont deux entiers naturels tels que $\mathrm{pgcd}(u, v) = 1$. On définit alors $F_n(x) = v^n(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x))$.
   (a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des nombres entiers.
   (b) On note $g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x)$. Montrer que $g_n'(x) = \pi^2 u^n f_n(x)\sin(\pi x)$.
   (c) Monter que $A_n = \pi u^n \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\, dx$ est un nombre entier.
3. On pose désormais $w_n = \dfrac{u^n}{n!}$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, on ait $w_n < \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}$.
   (c) En déduire qu'à partir du rang n_0, $A_n \in]0, 1[$, puis que π^2 est un nombre irrationnel. En déduire l'irrationnalité de $\zeta(2)$.
   (d) Que peut-on en déduire concernant l'irrationnalité de π ?